目　　录

第一章　Banach 空间的微分学 ………………………………… (1)
§1　赋范线性空间中的级数 ………………………………… (1)
§2　可导映射,求导法则 ………………………………… (5)
§3　连续线性映射空间中的导数 ………………………………… (14)
§4　中值定理及其应用 ………………………………… (18)
§5　偏导数,高阶导数 ………………………………… (22)
§6　积分 ………………………………… (27)
§7　隐函数定理,反函数定理,秩定理 ………………………………… (32)
§8　Schauder 不动点原理 ………………………………… (41)
习题 ………………………………… (45)
第二章　流形上的微积分 ………………………………… (51)
§1　基本概念 ………………………………… (51)
§2　余切空间,切空间 ………………………………… (54)
§3　子流形 ………………………………… (64)
§4　外代数 ………………………………… (71)
§5　外微分 ………………………………… (82)
§6　积分,Stokes 公式 ………………………………… (91)
习题 ………………………………… (101)
第三章　抽象测度 ………………………………… (103)
§1　可测空间,测度空间,抽象测度的构造 ………………………………… (103)
§2　广义测度 ………………………………… (127)
§3　Borel 测度,正则 Borel 测度,Radon 测度 ………………………………… (137)
§4　复测度 ………………………………… (149)
§5　拓扑群,Haar 测度 ………………………………… (154)

习题 …………………………………………………… (161)
第四章 广义函数(分布)与 Fourier 变换 ………………… (168)
§1 拓扑线性空间,局部凸空间 ……………………… (168)
§2 对偶空间,对偶拓扑 ……………………………… (177)
§3 分布空间及其基本性质 …………………………… (186)
§4 Fourier 分析 ……………………………………… (208)
§5 Wiener-Paley 定理 ………………………………… (221)
习题 …………………………………………………… (230)

附录 …………………………………………………… (235)
§1 Banach 空间中的几个重要定理 …………………… (235)
§2 点集拓扑的基本知识 ……………………………… (243)
§3 多重线性映射空间,连续映射空间 ……………… (259)
参考书目 ……………………………………………… (277)

第一章 Banach 空间的微分学

本章§1是关于赋范线性空间中级数的基本知识,作为今后几章的准备.§2和§3从线性映射出发给出 Banach 空间 X 到 Y 的连续映射,Fréchet 可导与 Gateaux 可导的定义,证明复合映射与逆映射的求导法则,并给出应用.§4阐明中值定理在 Banach 空间中将取不等式形式.§5中偏导数与高阶导数是借助于多重线性映射来定义的;分析学中的 Taylor 公式在 Banach 空间也有推广.§6在引入积分概念后,证明几个基本积分公式.§7证明在许多数学分支中都很有用的隐函数、反函数及秩定理.最后,§8证明 Schauder 不动点原理.

§1 赋范线性空间中的级数

本节中都假设 X 为数域 $\mathbf{K}$(实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$)上的赋范线性空间,元 $x\in X$ 的范数记为 $\|x\|$.

定义 1.1 设 $x_n\in X$.若对任意的 $n\geqslant 0$,有

$$x_0+\cdots+x_n=\sum_{k=0}^{n}x_k=s_n,$$

则称一对序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$,$(s_n)_{n\geqslant 0}$ 为一个级数,记为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$. 称 x_n 为此级数的第 n 项,而称 s_n 为其第 n 部分和.

我们称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ 收敛到 s,若

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

精确地说,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\geqslant 0$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\|s_n-s\|$

$<\varepsilon$；记为 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = s$，并称 s 为级数的和. 类似于初等微积分中的一些定理，我们有

定理 1.1(Cauchy 准则) 若 X 中的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\geqslant 0$，使当 $n\geqslant n_0$，$p\geqslant 0$ 时，有

$$\| s_{n+p} - s_n \| = \| x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \| \leqslant \varepsilon.$$

反之，若上述条件满足，且 X 为 Banach 空间，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛于 $s\in X$.

定理 1.2 若 X 中的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 分别收敛于 s 与 s'，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}(ax_n)$ 分别收敛于 $s+s'$ 与 as，这里 $a\in\mathbb{K}$.

定理 1.3 设 $0=k_0<k_1<k_2<\cdots$ 为整数序列. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛于 s，且 $y_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} x_j$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 也收敛于 s.

定义 1.2 若 X 中的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 的各项的范数所生成的数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 绝对收敛.

显然，如下定理成立.

定理 1.4 若 X 中的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 也收敛，并且当 X 为 Banach 空间时，还有下式成立：

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \| .$$

记 $\boldsymbol{P}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 为非负整数集，$\boldsymbol{N}=\{1,2,\cdots\}$ 为自然数集. 我们有

定理 1.5(绝对收敛级数的可交换性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 为 X 中的绝对收敛级数. 令

$$\sigma : P \to P$$

为一对一的满映射,若记 $y_n = x_{\sigma(n)}$,则 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 也绝对收敛,并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

定理 1.6(绝对收敛级数的可结合性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 为 X 中的绝对收敛级数. 若

$$P = \bigcup_{n \in I} B_n,$$

I 为有限或无限集,B_n 互斥. 令

$$z_n = \sum_{k \in B_j} x_k,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 也绝对收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

利用级数理论还可以证明下面有用的定理.

定理 1.7 设 X 为具有单位元 e 的 Banach 代数. 若 $z \in X$ 且 $\| z \| < 1$,则 $e - z$ 为可逆元,其逆元为

$$(e - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

其范数满足

$$\| (e - z)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| z \|}.$$

(Banach 代数的定义可参看附录定义 3.7.)

证 令 $y_n = e + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$. 因为 $\| z \| < 1$,故对于任意两个整数 $n, p \in N$ 时有

$$
\begin{aligned}
\| y_{n+p} - y_n \| &= \left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} z^k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| z^k \| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| z \|^k = \| z \|^n \sum_{k=0}^{p-1} \| z \|^k \\
&\leqslant \| z \|^n \sum_{k=0}^{\infty} \| z \|^k = \frac{\| z \|^n}{1 - \| z \|}.
\end{aligned}
$$

从而$\{y_n\}$是 X 中的 Cauchy 序列. 据 X 的完备性，存在 $y \in X$，使 $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. 由于

$$
\big| \| y \| - \| y_n \| \big| \leqslant \| y - y_n \|,
$$

得 $\| y \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| y_n \|$.

另一方面，对所有 $n \in N$，下式成立：

$$
\| y_n \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| z \|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| z \|^k = \frac{1}{1 - \| z \|}.
$$

这样便得到

$$
\| y \| \leqslant \frac{1}{1 - \| z \|}.
$$

现证 y 是 $e-z$ 的逆元. 因为

$$
zy_n = y_n z = z + z^2 + \cdots + z^n = y_{n+1} - e,
$$

取极限便得 $zy=yz=y-e$，从而 $y-zy=y-yz=e$，亦即

$$
(e - z)y = y(e - z) = e.
$$

定理得证.

把这个定理应用于 Banach 空间 X 到 X 的连续线性映射空间 $\mathscr{L}(X;X)$（其定义见附录 § 3.2），可得下面的定理 1.8. 注意，此时，$\mathscr{L}(X;X)$在加法运算 $u+v$，数乘运算 au 与复合运算 $u \circ v$ 之下成为一个具有单位元 $e=I$ 的 Banach 代数，且 $\| I \| =1$.

定理 1.8 在 Banach 代数 $\mathscr{L}(X;X)$中，若 $\omega \in \mathscr{L}(X;X)$，且 $\| \omega \| <1$，则线性映射 $I+\omega$ 是 $\mathscr{L}(X;X)$中的同胚，其逆为

$$
(I + \omega)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega^n,
$$

并且

$$\|(I+\omega)^{-1}-I+\omega\| \leqslant \frac{\|\omega\|^2}{(1-\|\omega\|)}.$$

§2 可导映射，求导法则

本节与以后各节，若无特殊说明，都假设 X,Y,Z 为同一数域上的 Banach 空间.

导数在整个自然科学领域中的重要地位是众所周知的. 随着科学和技术的发展，人们走出了欧氏空间. 面临着的重要问题之一，是如何定义具有一般拓扑结构的空间之间的映射的导数. 这里，我们只介绍 Banach 空间 X 中的开集 A 到 Y 的映射 $f: A\to Y$ 的导数，希望从中能给读者以启迪，去研究更一般空间上的类似问题.

回忆经典导数的定义

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\quad x\in(a,b)\subset \boldsymbol{R}.$$

这里极限值表示函数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ 在 $x_0\in(a,b)$ 的变化率. 若将上式改写为

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=0,$$

而把 $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ 理解为通过 x_0 的曲线 $y=f(x)$ 的切线，就可以启示我们去定义 Banach 空间中映射的相切概念，并且给出关于映射的可导概念.

定义 2.1 设 $A\subset X$ 为 X 中的开子集，f,g 为 A 到 Y 的两个映射. 若

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}\frac{\|f(x)-g(x)\|_Y}{\|x-x_0\|_X}=0,$$

则称 f 与 g 在 $x_0\in A$ 相切.

显然，我们有如下简单性质.

定理 2.1 (1) 若 f,g 在 x_0 相切，并且 f,g 在 x_0 连续，则

$$f(x_0) = g(x_0).$$

(2) 在 X 与 Y 的等价范数之下，相切性不变.

(3) 相切有传递性，亦即在 x_0 点，若 f 与 g 相切，又 g 与 h 相切，则 f 与 h 在该点相切.

(4) 与映射 f 在 x_0 相切的所有映射中，最多只有一个形如

$$x \to f(x_0) + u(x - x_0)$$

的映射，这里 u 为 X 到 Y 的线性映射.

定义 2.2 设 $A \subset X$ 为 X 中的开子集，$f: A \to Y$ 为连续映射. 若对 $x_0 \in A$，存在 X 到 Y 的线性映射 $u: X \to Y$，使得映射 $g: x \to f(x_0) + u(x - x_0)$ 与 f 在 x_0 相切，则称 f 在 $x = x_0$ 点 Fréchet 可导(F-可导)，而线性映射 u 称为 f 在 x_0 点的 F-导数，记为 $f'(x_0)$或 $\mathrm{D}f(x_0)$. 若 f 在 A 的每一点都 F-可导，就称 f 在 A 上 F-可导. 如不发生混淆，我们简称 F-导数为导数.

以下总假设 A 为 X 的开子集.

定理 2.2 设 $f: A \to Y$ 为 X 的开子集 A 到 Y 的连续映射. 若 f 在 $x_0 \in A$ 可导，则其导数 $f'(x_0) \in \mathscr{L}(X;Y)$，且它是唯一的. 若记 $f'(x_0) = u$，则

$$\| u(t) \| \leqslant \| u \| \, \| t \|, \quad t \in X,$$

且 $\| u \| = \sup\limits_{\|t\|=1} \| u(t) \|$.

证 唯一性可由定理 2.1(4)得到. 而据 f 的连续性与可导性，以及附录中的定理 3.2，可得 $f'(x_0) \in \mathscr{L}(X;Y)$，并得所需的估计式.

例 2.1 常映射 $f: X \to Y$ 在 X 的任一点可导，其导数为 $f'(x) = \theta \in \mathscr{L}(X;Y)$，$\theta$ 为 $\mathscr{L}(X;Y)$的零元.

例 2.2 X 到 Y 的连续线性映射 $u: X \to Y$ 在 X 的任一点可导，且 $\mathrm{D}u = u$.

例 2.3 设 X, Y, Z 为 Banach 空间，$f: X \times Y \to Z$ 为连续线性映射. 则 f 在 $X \times Y$ 的任一点(x_0, y_0)可导，且

$$\mathrm{D}f(x_0, y_0)(s, t) = f(x_0, t) + f(s, y_0). \qquad (2.1)$$

我们证明公式(2.1).令

$$u(s,t) = f(x_0,t) + f(s,y_0),$$

其中 $s=x-x_0$, $t=y-y_0$. 由于 f 为二重线性映射,故

$$J \equiv \frac{\| f(x_0+s,y_0+t) - f(x_0,y_0) - u(s,t) \|_Z}{\| (s,t) \|_{X\times Y}}$$

$$= \frac{\| f(x_0,t) + f(s,y_0) + f(s,t) - u(s,t) \|_Z}{\| (s,t) \|_{X\times Y}}$$

$$\leqslant \frac{\| f(s,t) \|_Z}{\| (s,t) \|_{X\times Y}} \leqslant \frac{c \| s \|_X \| t \|_Y}{\| (s,t) \|_{X\times Y}}$$

$$\leqslant c' \| (s,t) \|_{X\times Y}.$$

上式的最后一步是由积空间的范数定义得到. 当 $(s,y)\to(x_0,y_0)$ 时, $J\to 0$, 从而(2.1)式成立.

例 2.4 若 f 为 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 上的可导映射. 设 f 在选定的一个基底下的分量为$(f_1,\cdots,f_m)$,则 f 可导的充要条件是 f_j 可导, $j=1,\cdots,m$, 且其导数为

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{j=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n}.$$

求导运算是线性运算,也就是

$$\mathrm{D}(f+g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g, \quad \mathrm{D}(af) = a\mathrm{D}f.$$

我们介绍复合映射及逆映射的求导法则.

以后使用如下方便的记法:若 f 在 x_0 可导,则任给 $\varepsilon>0$,存在 $r>0$,使得

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)(\Delta x) + o(\Delta x)$$

对于 $\|\Delta x\| \leqslant r$ 成立;或

$$f(x_0+s) - f(x_0) = f'(x_0)(s) + o(s)$$

对于 $\|s\| \leqslant r$ 成立,这里 $o(s)\in Y$,且 $\|o(s)\| \leqslant \varepsilon \|s\|$.

定理 2.3 设 X,Y,Z 为 Banach 空间, $x_0\in A\subset X$, $f: A\to Y$ 为连续映射, $y_0=f(x_0)$. 又设 $B\subset Y$ 为含 $f(x_0)$的开集, $g: B\to Z$ 为连续映射. 若 f 在 x_0 可导, g 在 y_0 可导,则 $h=g\circ f$ 在 x_0 可

导，并且下式成立：

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0). \tag{2.2}$$

证 任给 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$，使得当 $\|s\|<r, \|t\|\leqslant r$ 时有

$$f(x_0+s) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot s + o_1(s),$$

$$\|o_1(s)\| \leqslant \varepsilon\|s\|;$$

$$g(y_0+t) = g(y_0) + g'(y_0)\cdot t + o_2(t),$$

$$\|o_2(t)\| \leqslant \varepsilon\|t\|.$$

由线性映射 $f'(x_0)$ 与 $g'(y_0)$ 的连续性，存在 $a>0, b>0$，使对任意 $s\in X, t\in Y$，有

$$\|f'(x_0)\cdot s\| \leqslant a\|s\|, \quad \|g'(y_0)\cdot t\| \leqslant b\|t\|.$$

从而当 $\|s\|\leqslant r$ 时，

$$\|f'(x_0)\cdot s + o_0(s)\| \leqslant (a+1)\|s\|.$$

而当 $\|s\| \leqslant \dfrac{r}{a+1}$ 时，

$$\|o_2(f'(x_0)\cdot s + o_1(s))\| \leqslant (a+1)\varepsilon\|s\|,$$

$$\|g'(y_0)\cdot o_1(s)\| \leqslant b\varepsilon\|s\|.$$

上面两式复合的结果给出：

$$h(x_0+s) = g(y_0) + g'(y_0)(f'(x_0)\cdot s) + o_3(s),$$

且 $\|o_3(s)\|\leqslant(a+b+1)\varepsilon\|s\|$. 从而

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0).$$

定理得证.

用类似的方法，不难证明逆射的求导法则.

定理 2.4 设 $A\subset X, B\subset Y$ 为开子集，$f: A\to B$ 为同胚映射. 若 f 在 $x_0\in A$ 可导，且 $f'(x_0)$ 为 X 到 Y 的线性同胚，则 f^{-1} 在 $y_0=f(x_0)$ 可导，且

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}. \tag{2.3}$$

上述求导法则，虽与经典情形的形式类似，但却有新的理解. 例如复合函数求导法则(2.2)式，理解为两个线性映射 $g'(y_0)$ 与 $f'(x_0)$ 的复合. 逆映射求导法则(2.3)式理解为线性映射 $f'(x_0)$ 的

逆映射，等等.

当我们取 $X=Y=\boldsymbol{R}$ 时，现在的结果都有相应的解释. 例如，容易看出，定理 2.4 中的条件"$f'(x_0)$为 X 到 Y 的线性同胚"相当于经典情形的"$f'(x_0)\neq 0$". 此外，请读者考虑为什么在经典情形下 $f'(x_0)$只是一个实数，而现在的情形下它却是一个线性映射呢？思考后再参看附录 §3.2 中关于多重线性映射的性质，便能找到答案.

定理 2.5 设 f 是 X 到 Y 的连续映射，且 f 在过点 $x_0\in X$ 的线段 x_0+th 上 F-可导，$h\in X, t\in[-1,1]$. 则极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0+th)\bigg|_{t=0}$$

存在，并且等于 $f'(x_0)h$.

证 记 $\varphi(t)=f(x_0+th)$. 显然，$\dfrac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$ 是 Y 中的元. 我们有

$$\varphi'(t)|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}.$$

由复合函数的求导法则得

$$\varphi'(t)|_{t=0}=f'(x_0+th)|_{t=0}(x_0+th)'|_{t=0}=f'(x_0)h.$$

从上面关于 F-导数性质的讨论可以看到，F-导数是经典导数概念的推广. 然而，很多情形下要遇到其他类型的导数. 现在我们再介绍一下常用的 Gateaux 导数.

定义 2.3 称 f 在 $x_0\in A$ 为 Gateaux 可导(G-可导)，若对每个 $h\in X$，存在 Y 中的元 $\mathrm{d}f(x_0,h)\in Y$，它是 h 的线性函数，使得

$$f(x_0+th)-f(x_0)-t\cdot\mathrm{d}f(x_0,h)=o(t),$$
$$t\to 0^+,\ x_0+th\in A.$$

$\mathrm{d}f(x_0,h)$称为 f 在 x_0 沿 h 的 G-导数，记为 $\mathrm{d}f(x_0)h\equiv\mathrm{d}f(x_0,h)$.

Gateaux 导数有如下基本性质.

定理 2.6 (1) 若 G-导数存在，则它是唯一的.

(2) 若 $y^*\in Y^*$，这里 Y^* 是 Y 的对偶空间. 令

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th)\rangle,$$

则当 f 的 G-导数存在时，$\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处右可导，且

$$\varphi'_t(0) = \langle y^*, \mathrm{d}f(x_0, h)\rangle.$$

(3) 若 f 为 G-可导，则

$$\| f(x+h) - f(x) \| \leqslant \sup_{0<t<1} \| \mathrm{d}f(x+th, h) \|.$$

证 我们仅证明性质(3). 由 Hahn-Banach 定理(附录 1.2)，存在 $y^* \in Y^*$，$\| y^* \| = 1$，使得

$$\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0)\rangle = \| f(x_0+h) - f(x_0) \|.$$

令 $\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0+th)\rangle$，$\varphi(t)$ 在 $t\in[0,1)$ 可导，且

$$\varphi'_t(t) = \langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+th, h)\rangle.$$

于是由经典的中值定理得

$$\begin{aligned}
\| f(x_0+h) - f(x_0) \| &= |\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0)\rangle| \\
&= |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'_t(\xi)| \\
&= |\langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h)\rangle| \\
&\leqslant \sup_{0<\xi<1} |\langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h)\rangle| \\
&\leqslant \sup_{0<\xi<1} \| \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h) \|.
\end{aligned}$$

这就是要证明的.

关于 F-导数与 G-导数的关系，我们有：

定理 2.7 映射 $f: X\to Y$ 在 x_0 点 F-可导，蕴涵 f 在 x_0 点 G-可导，并且二者相等.

证明可由定理 2.5 得到.

定理 2.8 若映射 $f: X\to Y$ 在 x_0 点的邻域 U 中G-可导，$\mathrm{d}f(x)\in\mathscr{L}(X;Y)$，则 f 在点 x_0 处是 F-可导的，且

$$f'(x_0) = \mathrm{d}f(x_0).$$

证 设 $g(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)h$. 取一个元 $y^* \in Y^*$，由中值定理得

$$\langle y^*, g(h)\rangle = \langle y^*, [\mathrm{d}f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h\rangle,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$. 若我们取 $y_0^* \in Y^*$，且 $\| Y_0^* \| = 1$，便得

$$\begin{aligned}\| g(h) \| &= \langle y_0^*, g(h) \rangle \\ &= \langle y_0^*, [\mathrm{d}f(x_0 + \theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h \rangle \\ &\leqslant \| [\mathrm{d}f(x_0 + \theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h \| \\ &\leqslant \| \mathrm{d}f(x_0 + \theta h) - \mathrm{d}f(x_0) \| \, \| h \|.\end{aligned}$$

由此即得定理的结论.

定理 2.9 $f(x)$在 $x \in A$ 为 F-可导$\Longleftrightarrow f(x)$在 $x \in A$ 为 G-可导，且 G-导数 $\mathrm{d}f(x,h)$是有界线性算子，在$\{h \in X : \|h\| = 1\}$上一致成立：

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \mathrm{d}f(x,h).$$

此定理请读者自行证明.

由此定理可以看出在经典情形下，G-导数就是熟知的方向导数. F-导数与 G-导数还有其他一些性质，我们留作习题.

例 2.5 Урысон 算子

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y,f(y))\mathrm{d}y,$$

$$x, y \in [0,1], \quad f \in C([0,1]),$$

$C([0,1])$为$[0,1]$上的复值连续函数空间. 设函数 $k(x,y,z)$关于第三个变量 z 的偏导数

$$\frac{\partial k}{\partial z} : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

一致连续，计算 A 在 $g \in C([0,1])$处的 F-导数.

由于

$$\begin{aligned}&\left| k(x,y,g(y)+h(y)) - k(x,y,g(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y) \right| \\ &\quad = \left| \int_0^1 \left\{ \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)+th(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)) \right\} h(y)\mathrm{d}t \right| \\ &\quad \leqslant \|h\| \int_0^1 \left| \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)+th(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)) \right| \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

又由于 $\frac{\partial k}{\partial z}$ 的一致连续性，故

$$\left|A(g+h)(x)-Ag(x)-\int_0^1\frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1\left\{k(x,y,g(y)+h(y))-k(x,y,g(y))\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\right\}\mathrm{d}y\right|$$
$$=o(\|h\|).$$

从而

$$\mathrm{D}A(g)h(x)=\int_0^1\frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\mathrm{d}y,\quad h\in C([0,1]).$$

例 2.6 微分算子 $A: C^1([0,1])\to C([0,1])$，其中

$$Af(x)=f'(x)+[f(x)]^2.$$

试求 $Af(x)$的导数.

计算后得

$$\mathrm{D}A(g)(h)(x)=h'(x)+2g(x)h(x).$$

例 2.7 设 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 为有界开子集，$u: \Omega\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}$ 为 $n+k$ 个变元的 Borel 可测函数. 若对每个 $t\in\Omega$，函数 $x\to u(t,x)\in C^1$，且存在 $a\in L^2(\Omega)$与常数 $b>0$，使

$$|u'_y(t,y)|\leqslant|a(t)|+b|y|,\quad \forall y\in\boldsymbol{R}^k.$$

又若 $\int_\Omega|u(t,0)|\mathrm{d}t<+\infty$，则函数

$$U(x)=\int_\Omega u(t,x(t))\mathrm{d}t: L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)\to\boldsymbol{R}$$

是 F-可导的.

事实上，对每个固定的 $t\in\Omega$，对于 $v\in L^2(\Omega)$，我们有

$$g(t)\equiv\frac{\partial}{\partial s}(u(t,x(t)+sv(t)))=\mu'_y(t,x(t)+sv(t))v(t).$$

故

$$|g(t)|\equiv\left|\frac{\partial}{\partial s}u(t,x(t)+sv(t))\right|$$
$$\leqslant|v(t)|\,|a(t)|+b|x(t)+sv(t)|$$

$$\leqslant |v(t)||a(t)| + b(|x(t)| + |v(t)|), \quad s \in [0,1].$$

$g(t)$为 t 的可积函数. 于是

$$|u(t,v(t))| = \left| u(t,0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} u(t,sv(t))\mathrm{d}s \right|$$
$$\leqslant |u(t,0)| + |g(t)|.$$

从而有

$$|U(v)| \leqslant \int_\Omega |u(t,0)|\mathrm{d}t + \int_\Omega |g(t)|\mathrm{d}t < +\infty.$$

这表明 U 有意义. 另一方面,

$$J \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U(x+sv)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_\Omega u(t,x(t)+sv(t))\mathrm{d}t\Big|_{s=0}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,上式中积分与求导可交换次序,因而

$$J = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s} u(t,x(t)+sv(t))\Big|_{s=0}\mathrm{d}t$$
$$= \int_\Omega u'_y(t,x(t)+sv(t))v(t)\Big|_{s=0}\mathrm{d}t,$$

其中

$$\int_\Omega u'_y(t,x(t))v(t)\mathrm{d}t = \langle u'_y \circ x, v\rangle,$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$为 $L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$中的内积. 由于 $u'_y \circ x \in L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$,故

$$\mathrm{d}U(x,v) = \langle u'_y \circ x, v\rangle.$$

由此,再据 $u'_y \circ x$ 在 $L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$中的连续性,便不难推出 U 是 F-可导的.

还有很多应用的例,我们不一一列举了. 读者可见参考书目[4],[6],[9]等.

在现代数学、物理学以及许多应用科学中,我们还会遇到严格可导、Gibbs 可导、p 型可导等概念,这诸多导数概念各有各自的背景、意义和应用. 虽然这些内容已经超出本书的范围,但强调一下引进这些导数的思路是有益的. 这里仅举一例.

设 X 为实数直线 $X=\boldsymbol{R}$,对于 $x=(x_m,x_{m+1},\cdots)\in\boldsymbol{R}$, $x_j\in$

$\{0,1\}, j \geqslant m, m \in \mathbf{Z}$. 令 $B_x^s = \{y \in X: y = (x_m, \cdots, x_{s-1}, y_s, y_{s+1}, \cdots), y_k \in \{0,1\}, y_s \neq 0\}$为 x 的 s 邻域,$s \in M = \{m+1, m+2, \cdots\}$. 记 $\mathscr{E} = \{B_x^s: x \in \boldsymbol{R}, s \in M\}$. 不难验证,$\mathscr{E}$ 构成一个邻域滤系基,实数直线具有这样的 $\mathscr{E}$ 拓扑成为一个拓扑空间,它与通常 ε-δ 邻域拓扑完全不同. 近年来,自然科学和工程技术的许多领域中的研究课题都与这种拓扑有密切关系. 然而,经典导数对 $\mathscr{E}$ 上定义的函数已经不能使用. 由于电子技术与大规模集成电路的快速发展,使新掘起的在局部域与局部紧群上的调和分析领域迅速展开了对在上述拓扑所定义的函数的 Gibbs 导数的研究,而且取得了很多成果. 定义 Gibbs 导数的思路是:由于实数直线$(-\infty, +\infty)$上的 Newton 导数满足方程

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy})' = \mathrm{i}y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}),$$

其中 $\{e^{ixy}\}$ 是实数直线$(-\infty, +\infty)$在通常拓扑下的特征群,因而定义 $\mathscr{E}$ 上的 Gibbs 导数时,先求出 $\mathscr{E}$ 的特征群 $\widetilde{\mathscr{E}}$,而后寻找满足

$$\mathrm{D}^{(1)}(\chi_y(x)) = y\chi_y(x)$$

的运算 $\mathrm{D}^{(1)}$,把 $\mathrm{D}^{(1)}f(x)$ 定义为 $f: \mathscr{E} \to C$ 的 Gibbs 导数. 由此例可知,定义导数的思想是多方面的,要视具体问题而定.

§3 连续线性映射空间中的导数

本节主要讨论两个连续线性映射的复合映射的导数,以及一个可逆的连续线性映射的导数. 作为上节求导法则的应用,我们有:

定理 3.1 设 X, Y, Z 为三个 Banach 空间,则乘积空间 $\mathscr{L}(X;Y) \times \mathscr{L}(Y;Z)$到 $\mathscr{L}(X;Z)$中的映射$(u,v) \to v \circ u$ 是可导的,并且在(u_0, v_0)的导数是映射$(s,t) \to v_0 \circ s + t \circ u_0$.

进而,有如下定理:

定理 3.2 设 X, Y 为 Banach 空间,如果至少存在一个连续线性映射 $u_0, u_0 \in \mathscr{L}(X;Y)$,使得 $u_0^{-1} \in \mathscr{L}(Y;X)$,则 $\mathscr{L}(X;Y)$中

的集

$$\mathscr{H} = \{u \in \mathscr{L}(X;Y) : u \text{ 为 } X \text{ 到 } Y \text{ 的线性同胚}\}$$

是 $\mathscr{L}(X;Y)$ 中的开集. 令

$$\mathscr{H}^{-1} = \{u^{-1} : u \in \mathscr{H}\}.$$

于是, $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{-1}$ 的映射 $\varphi: u \to u^{-1}$ 是连续可导的, 且它在 u_0 的导数是 $\mathscr{L}(\mathscr{L}(X;Y);\mathscr{L}(Y;X))$ 中的元

$$s \to -u_0^{-1} \cdot s \cdot u_0^{-1}.$$

证 先证明 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{L}(X;Y)$ 中的开集. 为此只需证明对于任意的 $u_0 \in \mathscr{H}$, 存在 $r > 0$, 使得

$$B(u_0, r) = \{u \in \mathscr{L}(X;Y) : \|u - u_0\| < r\} \subset \mathscr{H}.$$

由

$$u = u_0 - u_0 + u = u_0[I + u_0^{-1}(u - u_0)],$$

据 u_0^{-1} 的存在性及定理 1.8, 当 $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|} = r$ 时, 元 $I + u_0^{-1}(u - u_0)$ 的逆元存在, 从而 u^{-1} 存在, 得到 $B(u_0, r) \subset \mathscr{H}$.

从定理 1.8 可推出, $\varphi: u \to u^{-1}$ 是 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{-1}$ 的同胚映射.

最后, 证 $\varphi: \mathscr{H} \to \mathscr{H}^{-1}$ 在 $u_0 \in \mathscr{H}$ 的可导性, 并求出它的导数. 事实上, 当不等式 $\|u_0^{-1}\| < 1$ 成立时, 有

$$\begin{aligned}
\varphi(u_0 + s) - \varphi(u_0) &= (u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} \\
&= (I + u_0^{-1}s)^{-1}u_0^{-1} - u_0^{-1} = [(I + u_0^{-1}s)^{-1} - I]u_0^{-1} \\
&= -u_0^{-1} \cdot s \cdot u_0^{-1} + (u_0^{-1}s)^2u_0^{-1} - (u_0^{-1}s)^3u_0^{-1} + \cdots \\
&= -u_0^{-1} \cdot s \cdot u_0^{-1} + o(s),
\end{aligned}$$

其中 $o(s)$ 满足

$$\begin{aligned}
\|o(s)\| &= \|(u_0^{-1}s)^2u_0^{-1} - (u_0^{-1}s)^3u_0^{-1} + \cdots\| \\
&\leqslant \|u_0^{-1}\|^3\|s\|^2\{1 + \|u_0^{-1}\|\|s\| \\
&\quad + (\|u_0^{-1}\|)^2\|s\|^2 + \cdots\} \\
&\leqslant \|u_0^{-1}\|^3\|s\|^2 \frac{1}{1 - \|u_0^{-1}\|\|s\|}.
\end{aligned}$$

于是, 只要取

$$r = \min\left\{\frac{1}{2\|u_0^{-1}\|}, \frac{\varepsilon}{2\|u_0^{-1}\|^3}\right\},$$

并取 $\|s\| \leqslant r$，便得 $\|o(s)\| \leqslant c\varepsilon\|s\|$，定理得证.

借助于定理 3.2，微积分学中的一些基本结果可用现在关于导数的概念来解释.

当把 X 取为 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 而 Y 取为一般 Banach 空间时，X 到 Y 的连续线性映射空间 $\mathscr{L}(X;Y)$ 成为 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$ 或 $\mathscr{L}(\boldsymbol{C};Y)$. 由附录定理 3.9 知，例如对于 $\boldsymbol{R}$，$\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$ 可视为 Y 自身，亦即 Y 中任一元 $b\in Y$ 可视为 $\boldsymbol{R}$ 到 Y 的连续线性映射 $u_b: \xi\to b\xi$，从而若 f 是 $\boldsymbol{R}$ 中开集 A 到 Y 的连续映射，且在 A 上可导，则它在点 $\xi\in A$ 的导数可视为 Y 中的一个元：$f'(\xi)\leftrightarrow b\in Y$. 因此，当 $Y=\boldsymbol{R}$ 时，由 $X=\boldsymbol{R}$，$A\subset X$，则 $f'(\xi)$ 成为 $\boldsymbol{R}$ 中的一个数. 这样，就回到经典微积分的情形，而定理 3.2 便成为一个公式：当 $\xi\neq 0$ 时，$\xi^{-1}=1/\xi$ 的导数等于 $-1/\xi^2$.

当 $X=\boldsymbol{R}$ 而 Y 为实 Banach 空间时，导数的定义是

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{f(\xi)-f(\xi_0)}{\xi-\xi_0},$$

且此时商 $\dfrac{f(\xi)-f(\xi_0)}{\xi-\xi_0}$ 属于 Y. 所以还可以定义一点的左导数与右导数等，而且前面关于导数的法则也都可写为经典的形式.

据此思路，可以从复合映射及逆映射求导法则得到经典微积分中的相应结果. 例如

定理 3.3 设 X, Y 为两个实 Banach 空间，若 $f: A\to Y$ 为 X 的开子集 A 上的可导映射，而 $g: G\to A$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的开子集 G 到 A 的可导映射，则 G 到 Y 的复合映射 $h=f\circ g$ 在 $\xi\in G$ 的导数是 Y 中的元，它等于 $f'(g(\xi))\circ g'(\xi)$，而 $g'(\xi)$ 是 X 中的元，并且有 $f'(g(\xi))\in\mathscr{L}(X;Y)$.

现在再举几个例子.

例 3.1 设 $f(x)=\|x\|$，$x\in X$，X 为 Hilbert 空间，试求其导数.

设$\langle x,y\rangle$为 Hilbert 空间的内积，由于$f: X\to \boldsymbol{R}^+$，对于任一固定的$x\in X$，取$s\in X$，由范数的连续性，我们有

$$
\begin{aligned}
f(x+s)-f(x) &= \langle x+s,x+s\rangle^{1/2}-\langle x,x\rangle^{1/2} \\
&= \frac{2\langle x,s\rangle+\langle s,s\rangle}{\sqrt{\langle x+s,x+s\rangle}+\sqrt{\langle x,x\rangle}} \\
&\sim \frac{\langle x,s\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}},
\end{aligned}
$$

故

$$
\sqrt{\langle x+s,x+s\rangle}-\sqrt{\langle x,x\rangle}-\frac{\langle x,s\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}=o(\|s\|).
$$

从而

$$
f'(x)=\frac{\langle x,s\rangle}{\|x\|}.
$$

例 3.2 设

$$
l^1=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots):\ \|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<+\infty,\xi_n\in \boldsymbol{R}\right\}.
$$

试证范数$x\to\|x\|$在任何点x都不可导.

本例的证明比较复杂，我们只叙述大体的步骤. 设$\varphi(x)=\|x\|_{l^1}$.

首先证明，对每个$u\in\mathscr{L}(l^1;\boldsymbol{R})$，存在有界序列

$$
\eta^0=(\eta_n^0)_{n=1}^{\infty},\quad \eta_n^0\in\boldsymbol{R},
$$

使得

$$
u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n^0,\quad \|u\|=\sup_{n\geqslant 1}|\eta_n^0|.
$$

其次证明，如果存在$u\in\mathscr{L}(l^1;\boldsymbol{R})$，使得$\varphi'=u$，分三种情况导出矛盾：

(1) 若对每个$n\geqslant 1$，有$\xi_n^0\geqslant 0$；

(2) 若对每个$n\geqslant 1$，有$\xi_n^0\leqslant 0$；

(3) ξ_n^0不定号.

从而得出 φ 不可导的结论.

例 3.3 映射 $x(t) \to \int_0^1 |x(t)| \mathrm{d}t$ 也是不可导的例子,这里 $x \in C[0,1]$.

例 3.4 设 $X=Y=R^n$,$f\in C^1(R^n,R^n)$,则映射 $f: R^n \to R^n$ 是 F-可导的,它的 F-导数就是它的 Jacobi 矩阵:

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\cdots,n}.$$

诸如 F-导数、G-导数,还有 G-弱导数、泛函数的梯度、拟导数等等,都有广泛的应用,我们不再一一列举.

§4 中值定理及其应用

经典分析中,中值定理是用等式形式

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

给出的,这里假设 f 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 中处处可导. 其几何意义也是众所周知的. 然而,等式形式的中值定理有其局限性,一则它的假设条件较强,二则比较难于推广到一般向量值函数的情形. 因此,要得到 Banach 空间的中值定理,就要寻找另外的形式.

若记 $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| = M$, 并设 M 为有限数,则由上述等式可得不等式

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a).$$

把绝对值理解为空间的范数,上面的不等式就有可能推广成Banach空间的中值定理.

首先,设 $X=R$,Y 为 Banach 空间,我们证明

定理 4.1 设 $f: I\equiv[\alpha,\beta]\to Y$ 为 R 中的闭区间 $I\equiv[\alpha,\beta]$ 到 Banach 空间 Y 的连续映射,$\varphi: I\to R$ 为单调递增的连续映射. 若存在 I 的子集 D,它至多是可数的,使对每个 $\xi\in I\setminus D$,f 与 φ 在 ξ 都有导数,且 $\|f'(\xi)\| \leqslant |\varphi'(\xi)|$,则

$$\| f(\beta) - f(\alpha) \| \leqslant \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \tag{4.1}$$

证 令 $n \to \rho_n$ 为 N 到 D 上的满射，并令 A 为集合

$$\Big\{\xi \in I:\ 对\ \alpha \leqslant \zeta < \xi\ 有\ \| f(\zeta) - f(\alpha) \| \leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\ 成立\Big\}.$$

由 $\alpha \in A$ 知 $A \neq \varnothing$. 若 $\xi \in A$，则所有满足 $\alpha < \eta < \xi$ 的 η 必有 $\eta \in A$. 设 $\gamma = \sup A$，由 f 与 g 的连续性，对 γ 有下式成立：

$$\| f(\gamma) - f(\alpha) \| \leqslant \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n}. \tag{4.2}$$

因此 $\gamma \in A$. 从而 $A = [\alpha, \gamma]$. 我们只需证明 $\gamma = \beta$，便可由上面关于 $\| f(\beta) - f(\alpha) \|$ 的不等式(4.2)及 ε 的任意性得到欲证的不等式(4.1).

用反证法，假设 $\gamma < \beta$. 分两种情况讨论：

情况一. $\gamma \notin D$. 由于 f 与 g 在 γ 可导，存在 $\delta > 0$，使得在 $(\gamma - \delta, \gamma + \delta)$ 中有

$$\| f(\gamma + s) - f(\gamma) - f'(\gamma)(s) \| \leqslant \varepsilon |s|.$$

取 $[\gamma, \gamma + \lambda] \subset (\gamma - \delta, \gamma + \delta)$，$\lambda > 0$，则对一切 $\zeta \in [\gamma, \gamma + \lambda]$，有

$$\| f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma) \| \leqslant \varepsilon(\zeta - \gamma)/2.$$

同理，

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma)| \leqslant \varepsilon(\zeta - \gamma)/2.$$

故利用 f 的可导性及假设条件，得

$$\begin{aligned} \| f(\zeta) - f(\gamma) \| &\leqslant \| f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma) \| + \| f'(\gamma)(\zeta - \gamma) \| \\ &\leqslant \varepsilon(\zeta - \gamma)/2 + |\varphi'(\gamma)|(\zeta - \gamma) \\ &\leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \| f(\zeta) - f(\alpha) \| &\leqslant \| f(\zeta) - f(\gamma) \| + \| f(\gamma) - f(\alpha) \| \\ &\leqslant \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma) + \varphi(\gamma) \end{aligned}$$

$$-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\gamma-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}2^{-n}$$

$$\leqslant\varphi(\zeta)-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\zeta-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\zeta}2^{-n},\tag{4.3}$$

这与 γ 的定义相矛盾.

情况二. $\gamma\in D$. 令 $\gamma=\rho_m$，由 f,g 的连续性，存在$[\gamma,\gamma+\lambda]\subset I$，使得对每一个 $\zeta\in[\gamma,\gamma+\lambda]$，有

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}2^{-m},\quad|\varphi(\zeta)-\varphi(\gamma)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}.$$

于是，仍然利用 f 的连续性及类似情况一的推理，我们得到

$$\|f(\zeta)-f(\alpha)\|\leqslant\|f(\zeta)-f(\gamma)\|+\|f(\gamma)-f(\alpha)\|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}+\varphi(\gamma)-\varphi(\alpha)+\varepsilon(\gamma-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}2^{-n}$$

$$\leqslant\varphi(\zeta)-\varphi(\gamma)+\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}+\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}+\varphi(\gamma)-\varphi(\alpha)$$

$$+\varepsilon(\gamma-\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}2^{-n}$$

$$=\varphi(\zeta)-\varphi(\alpha)+\varepsilon2^{-m}+\varepsilon\sum_{\rho_n<\gamma}2^{-n}+\varepsilon(\gamma-\alpha)$$

$$\leqslant\varphi(\zeta)-\varphi(\alpha)+\varepsilon\sum_{\rho_n<\zeta}2^{-n}+\varepsilon(\zeta-\alpha),$$

也得到了与 γ 的定义相矛盾.

在情况一与二两种情形下都得到矛盾，因此，$\gamma=\beta$，定理得证.

注意：本定理的条件即使改为 $\|f'(\xi)\|=\varphi(\xi)$，定理的结论仍然是不等式形式.

当我们取 $\varphi(\xi)=M(\xi-\alpha)$，$M>0$ 时，便得到如下形式的中值定理.

定理 4.2 设 f 除满足定理 4.1 的条件外，还满足 $\|f'(\xi)\|\leqslant M$，则有

$$\| f(\beta) - f(\alpha) \| \leqslant M(\beta - \alpha).$$

为给出 Banach 空间 X 到 Y 的映射的一般形式的中值定理，我们定义 Banach 空间中的“线段”.

定义 4.1 设 X 为赋范线性空间，$a,b\in X$，称 X 中的集

$$S_{ab} = \{x \in X : x = a + \xi(b - a), 0 \leqslant \xi \leqslant 1\}$$

为连结 a,b 的线段.

定理 4.3 设 X,Y 为 Banach 空间，$S\equiv S_{x_0,x_0+t}$为连结 X 的两点 x_0 与 x_0+t 的线段，f 为 S 的某个开邻域 U 到 Y 的连续映射. 若 f 在 S 的每一点都可导，则

$$\| f(x_0 + t) - f(x_0) \| \leqslant \| t \| \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} \| f'(x_0 + \xi t) \|.$$

证 考虑映射 $g:[0,1]\to Y$，满足 $g(\xi)=f(x_0+\xi t)$. 据定理 3.3，定理 2.4 与 § 2 的例 2.2，知 g 在$[0,1]$中处处可导，且 $g'(\xi)=f'(x_0+\xi t)\cdot t$. 于是由定理 4.2 与附录定理 3.7 便得欲证的不等式.

由中值定理可以得到许多有用的结果. 作为应用，我们有

定理 4.4 设 X,Y 为 Banach 空间，A 为 X 的连通开子集. 若 $f:A\to Y$ 在 A 的每一点的导数都存在并等于 0，则 f 是一个常数.

这个定理可由 A 的连通性与开集的性质以及定理 4.3 直接得到.

定理 4.5 设 X,Y 为 Banach 空间，A 为连接 X 中任意两点 a,b 的线段 S_{ab}的开邻域. 若 $f:A\to Y$ 为可导映射，则对每个 $x_0\in A$ 有

$$\begin{aligned} &\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a) \| \\ &\leqslant \| b - a \| \sup_{x\in S_{ab}} \| f'(x) - f'(x_0) \|. \end{aligned}$$

证明时，只要把定理 4.3 应用到映射 $x\to f(x)-f'(x_0)\cdot x$ 上，不难看出，它的导数为 $t\to(f'(x)-f'(x_0))\cdot t$. 请读者自行证明.

在以后几节中，我们还会遇到中值定理的应用.

§5 偏导数，高阶导数

Banach 空间 X 中的开集 $A\subset X$ 到 Y 的连续映射 $f: A\to Y$ 的导数是 X 到 Y 的连续线性映射，偏导数与高阶导数应当是什么呢？现在讨论这个问题. 我们仍约定，以下所讨论的导数均指 F-导数.

定义 5.1 设 X_1, X_2, Y 为 Banach 空间，A 为 $X_1\times X_2$ 中的开集，$(a_1,a_2)\in A$，我们称映射 $f: A\to Y$ 在 (a_1,a_2) 关于第一个（或第二个）变元 a_1（或变元 a_2）是可导的，若偏映射 $x_1: \to f(x_1,a_2)$（或 $x_2: \to f(a_1,x_2)$）在 a_1（或在 a_2）可导. 亦即，存在线性映射 $u: X_1\to Y$（或 $v: X_2\to Y$），使得

$$\lim_{x_1\to a_1}\frac{\| f(x_1,a_2)-f(a_1,a_2)-u(x_1-a_1)\|}{\| x_1-a_1\|}=0$$

$\left(\text{或}\lim\limits_{x_2\to a_2}\dfrac{\| f(a_1,x_2)-f(a_1,a_2)-v(x_2-a_2)\|}{\| x_2-a_2\|}=0\right)$，并且称线性映射 u（或 v）为 f 关于 x_1（或 x_2）的偏导数，记为 $\partial_1 f(a_1,a_2)$（或 $\partial_2 f(a_1,a_2)$）. 读者已清楚知道，这里 u（或 v）与 a_2（或 a_1）有关.

与§2 中的定理 2.2 类似，可以证明，若 f 在 (a_1,a_2) 关于第一个变元 x_1 可导（或关于第二个变元 x_2 可导），则

$$\partial_1 f(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(X_1;Y)\quad(\text{或 }\partial_2 f(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(X_2;Y)).$$

术语"连续可导"是指映射 $f: A\to Y$ 可导，而且 f' 为 A 中的连续映射.

定理 5.1 设 X_1, X_2, Y 与 A 如上. 若 $f: A\subset X_1\times X_2\to Y$ 为连续映射. 则 f 在 A 中为连续可导映射，当且仅当 f 关于第一个与第二个变元都可导，且 $\partial_1 f$ 与 $\partial_2 f$ 在 A 中连续. 此时，还有下面的公式成立：

$$\mathrm{D}f(x_1,x_2)(t_1,t_2)=\partial_1 f(x_1,x_2)\cdot t_1+\partial_2 f(x_1,x_2)\cdot t_2. \tag{5.1}$$

证 任取$(a_1,a_2)\in A$,我们证明:

必要性. 当f在A中连续可导时,映射$g: x_1\to f(x_1,a_2)$为$h: x_1\to(x_1,a_2)$与$f:(x_1,a_2)\to f(x_1,a_2)$复合而成:

$$g(x_1)=f\circ h(x_1).$$

因为h是X_1到$X_1\times X_2$的连续线性映射,记

$$h(x_1)=(h_1(x_1),h_2(x_1)),$$

其中$h_1(x_1)=x_1, h_2(x_1)=a_2$,故有

$$h'(x_1)=(h_1'(x_1),h_2'(x_1))=(x_1,0).$$

另一方面,$f:(x_1,a_2)\to f(x_1,a_2)$在$(a_1,a_2)$可导,其导数就是$\mathrm{D}f(a_1,a_2)$. 若令

$$i_1: t_1\to(t_1,0),\quad i_1\in\mathscr{L}(X_1;X_1\times X_2),$$

则

$$g'(a_1)=\partial_1 f(a_1,a_2)=\mathrm{D}f(a_1,a_2)\circ i_1,$$

这个映射存在并且连续,即$\partial_1 f\in\mathscr{L}(X_1;Y)$.

同理,$\partial_2 f(a_1,a_2)=\mathrm{D}f(a_1,a_2)\circ i_2$,其中

$$i_2: t_2\to(0,t_2),\quad i_2\in\mathscr{L}(X_2;X_1\times X_2),\quad \partial f_2\in\mathscr{L}(X_2;Y).$$

改写$(t_1,t_2)\in X_1\times X_2$为:

$$(t_1,t_2)=(t_1,0)+(0,t_2)=i_1(t_1)+i_2(t_2),$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{D}f(x_1,x_2)\cdot(t_1,t_2)&=\mathrm{D}f(x_1,x_2)(i_1(t_1)+i_2(t_2))\\&=\mathrm{D}f(x_1,x_2)\circ i_1(t_1)+\mathrm{D}f(x_1,x_2)\circ i_2(t_2)\\&=\partial_1 f(x_1,x_2)\cdot t_1+\partial_2 f(x_1,x_2)\cdot t_2.\end{aligned}$$

故(5.1)式成立.

充分性. 只需证明,对于任给的$\varepsilon>0$,存在$r>0$,使得当$\|(t_1,t_2)\|\leqslant r$时有

$$\begin{aligned}J\equiv&\ \|f(a_1+t_1,a_2+t_2)-f(a_1,a_2)\\&-[\partial_1 f(a_1,a_2)\cdot t_1+\partial_2 f(a_1,a_2)\cdot t_2]\|\\=&\ o((t_1,t_2)),\end{aligned}$$

并且 $\| o(t_1,t_2) \| \leqslant \varepsilon \| (t_1,t_2) \|$. 我们把 J 改写后估计如下：

$$\begin{aligned} J \leqslant & \ \| f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2 \| \\ & + \| f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2) - \partial_1 f(a_1, a_2) \cdot t_1 \| \\ \equiv & \ J_1 + J_2. \end{aligned}$$

由定理的假设条件可得第二项的估计

$$J_2 \leqslant \varepsilon \| (t_1, t_2) \|.$$

对于 J_1，由中值定理与 $\partial_2 f$ 的线性，得

$$\begin{aligned} J_1 \leqslant & \ \| f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) \\ & - \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 \| \\ & + \| \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 - \partial_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2 \| \\ \leqslant & \ \| t_2 \| \sup_{\| z \| \leqslant \| t_2 \|} \| \partial_2 f(a_1 + t_1, a_1 + z) \\ & \qquad - \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) \| \\ & + \| \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 - \partial_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2 \| \\ \leqslant & \ \| t_2 \| \Big\{ \sup_{\| z \| \leqslant \| t_2 \|} \| \partial_2 f(a_1 + t_1, a_1 + z) \\ & \qquad - \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) \| \\ & + \| \partial_2 f(a_1 + t_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2) \| \Big\}, \end{aligned}$$

再由 $\partial_2 f$ 的连续性便可完成定理的证明.

显然，可将偏导数的定义与定理 5.1 直接推广到 n 个 Banach 空间的积空间上去.

现在我们讨论高阶导数. 此时它不仅是线性映射而是多重线性映射.

定义 5.2 设 X, Y 为 Banach 空间，$A \subset X$ 为开集. $f: A \to Y$ 为连续可导映射. 若 f' 作为 X 到 $\mathscr{L}(X;Y)$的映射在 $x_0 \in A$ 可导，则称 f 在 x_0 为二次可导，其二阶导数记为 $f''(x_0)$或 $\mathrm{D}^2 f(x_0)$. 若 f 在 A 的每一点都是二次可导，则称 f 在 A 上二次可导.

由定义及 §2 知 $f''(x_0) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X;Y))$. 又据附录定理 3.10，我们知道线性空间 $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X;Y))$与 $\mathscr{L}(X, X; Y)$是等距

同构的. 因此 f 的二阶导数自然是 $X\times X$ 到 Y 的连续二重线性映射. 归纳地,任一个连续映射 $f: A\to Y$,若它在 $x_0\in A$ 的 n 阶导数存在,记为 $f^{(n)}(x_0)$,它便是 $X\times X\times\cdots\times X$ 到 Y 的连续 n 重线性映射,也就是

$$f^{(n)}\in \mathscr{L}(X\times\cdots\times X;Y).$$

现在我们介绍高阶导数如下的几个重要性质.

定理 5.2 设 X,Y 为 Banach 空间,$A\subset X$ 为开集,$f: A\to Y$ 为连续映射. 若 f 在 $x_0\in A$ 为二次可导,则对于任意固定元 $t\in X$,A 到 Y 的映射 $g: x\to \mathrm{D}f(x)\cdot t$ 在 x_0 的导数为

$$g'(x_0)\cdot s=\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(s,t).$$

证 把映射 g 视为如下两个映射的复合便可得所需的结果:

$$\varphi: \mathrm{D}f(x)\to \mathrm{D}f(x)\cdot t,\quad \psi: x\to \mathrm{D}f(x),$$

其中 φ 为 $\mathscr{L}(X;Y)$到 Y 的映射,ψ 为 X 到 $\mathscr{L}(X;Y)$的映射,而 $g=\varphi\circ\psi$.

定理 5.3 若 f 在 $x_0\in A$ 为二次可导,则连续二重线性映射 $\mathrm{D}^2f(x_0)$ 对称. 亦即

$$\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(s,t)=\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(t,s),\quad s,t\in X.$$

证 只要证明对任给的 $\varepsilon>0$,及任意的$(s,t)\in X\times X$,有

$$\|\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(s,t)-\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(t,s)\|\leqslant\varepsilon\|s\|\ \|t\|,\tag{5.2}$$

再由 ε 的任意性便得到所需的等式.

考虑辅助映射 $g: [0,1]\to Y$

$$g(\xi)=f(x_0+\xi s+t)-f(x_0+\xi s),$$

其中 t 与 s 满足 $\|s\|\leqslant r/2$, $\|t\|\leqslant r/2$,这里我们选取 r,使得以 x_0 为中心,r 为半径的球含在 A 中(请读者思考,如何想到这个辅助函数的). 由于

$$\begin{aligned}g'(\xi)&=(f'(x_0+\xi s+t)-(f'(x_0+\xi s))\cdot s\\&=[f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s+t)]\cdot s\\&\quad-[f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s)]\cdot s\end{aligned}$$

$$+\left[f''(x_0)\cdot(\xi s+t)-f''(x_0)\cdot(\xi s)\right]\cdot s,$$

故

$$\begin{aligned}g'(\xi)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s &= \left[f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s+t)\right]\cdot s\\ &\quad -\left[f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s)\right]\cdot s.\end{aligned}$$

据假设 f 二次可导，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $r'\leqslant r$，使当

$$\|s\|\leqslant r'/2,\quad \|t\|\leqslant r'/2$$

时有

$$\|g'(\xi)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\leqslant 2\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|).$$

再由中值定理并反复应用上述估计，得到

$$\begin{aligned}&\|g(1)-g(0)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\\ &\leqslant \|g(1)-g(0)-g'(0)\|+\|g'(0)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1}\|g'(\xi)-g'(0)\|+\|g'(0)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\\ &\leqslant 6\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|).\end{aligned}$$

类似地，考虑 $\bar{g}(\xi)=f(x_0+\xi t+s)-f(x_0+\xi t)$，得到

$$\|\bar{g}(1)-\bar{g}(0)-(f''(x_0)\cdot s)\cdot t\|\leqslant 6\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|).$$

由

$$g(1)+\bar{g}(1),\quad g(0)=\bar{g}(0)$$

得到，当 $\|s\|\leqslant r'/2$，$\|t\|\leqslant r'/2$ 时有

$$\|(f''(x_0)\cdot t)\cdot s-(f''(x_0)\cdot s)\cdot t\|\leqslant 6\varepsilon(\|s\|+\|t\|)^2.$$

最后用 λs 与 λt 代替 s 与 t，用赋范线性空间中规范方法，便得到对所有的 $s,t\in X$，都有

$$\|f''(x_0)\cdot(t,s)-f''(x_0)\cdot(s,t)\|\leqslant 24\varepsilon\|s\|\,\|t\|.$$

定理得证.

在 $X=\mathbb{R}^n$，中，此定理是什么形式？请读者自己考虑.

一般地，我们有

定理 5.4 若 $f:A\to Y$ 在 A 中 p 次可导，则 p 重线性映射 $D^p f(x)$ 对每一个 $x\in A$ 都是对称的.

也有如下(关于本章习题 6)的推广：

定理 5.5 设 $f=(f_1,\cdots,f_m)$ 为由 Banach 空间 X 的开子集 A 到 Banach 空间 $Y_1,\cdots,Y_m$ 的积空间 $Y_1\times\cdots\times Y_m$ 的连续映射，则 f 在 A 中 p 次可导，当且仅当每个 $f_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 在 A 中 p 次可导，并且下式成立

$$\mathrm{D}^p f=\left(\mathrm{D}^p f_1,\cdots,\mathrm{D}^p f_m\right).$$

§6 积 分

这里讨论的积分只是下面的一种特殊情形，即映射 f 的定义域是 $\boldsymbol{R}$ 中的区间$[\alpha,\beta]$，而值域在一个 Banach 空间 Y 中. 本节中若无特殊说明，总假设 Y 为 Banach 空间，f 为$[\alpha,\beta]\subset\boldsymbol{R}$ 到 Y 的映射，并记 $I=[\alpha,\beta]$.

定义 6.1 我们称 $I=[\alpha,\beta]$到 Y 的映射 φ 为阶梯映射，若存在 I 中的有限多个点 $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$，使 φ 在每个开区间 $(x_j,x_{j+1})(j=0,1,\cdots,n-1)$取常值 $y_i(y_i\in Y)$.

定义 6.2 对于 I 到 Y 的任一映射 f，若对任一点 $x\in I$，极限

$$\lim_{z\to x,z\in I,z>x} f(z)$$

存在，则称 f 在 x 有右极限(这里的极限，读者明白，是在 Y 的范数意义下取的)，并记为 $f(x+)$. 类似地，可定义左极限

$$\lim_{z\to x,z\in I,z<x} f(z)=f(x-).$$

左、右极限统称单边极限. 我们称 I 到 Y 的映射 f 为规则映射，若 f 在 I 的每一点都有单边极限.

由定义知阶梯映射必为规则映射；反之未必成立. 但我们有

定理 6.1 设 $f: I\to Y$ 为 I 到 Y 上的映射，则 f 为规则映射，当且仅当存在 I 上的阶梯映射列 φ_n，在 I 上 φ_n 一致收敛于 f.

证 *必要性.* 由于 f 是规则的，对每个 $x\in I$ 与任意正整数 $n\in N$，存在开区间

$$V_x = (\alpha_x, \beta_x), \quad x \in V_x,$$

使对同属于$(\alpha_x, x) \cap I$或$(x, \beta_x) \cap I$的s, t都有下列不等式成立

$$\| f(s) - f(t) \| \leqslant 1/n, \quad \bigcup_{x \in I} V_x \supset I.$$

由I的紧性，存在$x_1, \cdots, x_m$，使得

$$\bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j} \supset I.$$

把$\alpha, \beta, x_j, \alpha_{x_j}, \beta_{x_j}$按严格递增次序排列（相同的给以同一符号），并且重新记为$\{c_k : k = 1, 2, \cdots, l\}$. 因为每个$c_k$必属于某个$V_{x_j}$中，故对每个$k \leqslant l-1$而言，$c_{k+1}$或与$c_k$同属于一个$V_{x_j}$，或有$c_{k+1} = \beta_{x_j}$. 于是当$s, t \in (c_k, c_{k+1})$时，必有$s, t \in V_{x_j}$，因而

$$\| f(s) - f(t) \| \leqslant 1/n.$$

现在对上式确定的n，定义阶梯映射

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(c_k), & x = c_k, \\ f\left(\dfrac{c_k + c_{k+1}}{2}\right), & c_k < x < c_{k+1}, \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \cdots, l-1.$$

于是$\| f(x) - \varphi_n(x) \| \leqslant 1/n$对$x \in I$成立. 这样，我们构造了一个阶梯映射列$\{\varphi_n\}$，使得

$$\| f - \varphi_n \| = \sup_{x \in I} \| f(x) - \varphi_n(x) \| \leqslant \frac{1}{n},$$

从而φ_n在I上一致收敛于f.

充分性. 设f为I上的阶梯映射列$\{\varphi_n\}$的一致极限. 任给$\varepsilon > 0$，存在与I无关的$n_0 > 0$，使当$n \geqslant n_0$时，

$$\| f - \varphi_n \| \leqslant \varepsilon/3.$$

又对每个$x \in I$，由φ_n为阶梯映射，存在区间(α_x, β_x)，$x \in (\alpha_x, \beta_x)$，使对所有$s, t$同属于$(\alpha_x, x) \cap I$，或同属于$(x, \beta_x) \cap I$，都有下式成立

$$\| \varphi_n(s) - \varphi_n(t) \| \leqslant \varepsilon/3.$$

故当s, t同属上述两种区间之一时，总有$\| f(s) - f(t) \| \leqslant \varepsilon$，因此

单边极限

$$\lim_{z\to x, z\in I, z>x} f(z) \quad 与 \quad \lim_{z\to x, z\in I, z<x} f(z)$$

存在,定理得证.

显然,I 到 Y 上的连续映射是规则映射. 而由定理 6.1 可推知,I 到 Y 上的单调映射也是规则的.

引进规则映射的目的之一,是要考虑积分问题. 为此,我们先来定义积分.

定义 6.3 设 $f: I\to Y$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的区间$[\alpha,\beta]=I$ 到 Banach 空间 Y 的映射. 我们称连续映射 $g: I\to Y$ 为 f 在 I 中的原映射,如果存在 I 的至多含可数多个元的子集 D,使对每个 $\xi\in I-D$,g 在 ξ 处可导,并且 $g'(\xi)=f(\xi)$成立.

注意到 $g'(\xi)\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$,而 $f(\xi)\in Y$,因此等式 $g'(\xi)=f(\xi)$ 应理解为两个等距同构空间 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$与 Y 中的元相等. 也就是说,按附录中定理 3.9 的作法,对于 $f(\xi)\in Y$,对应的映射为 $\varphi_{f(\xi)}: t\to tf(\xi)$ $(t\in\boldsymbol{R})$. 于是 $\varphi_{f(\xi)}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$,而对应关系 $\varphi_{f(\xi)}\leftrightarrow f(\xi)$是 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$到 Y 的等距,这里 $\varphi_{f(\xi)}$就是现在定义中的 $g'(\xi)$ 了.

定理 6.2 若 g_1,g_2 为 f 在 I 中的两个原映射,则 g_1-g_2 在 I 中的为常映射.

定理 6.3 设 $f: I\to Y$ 为规则映射,则存在 I 到 Y 的规则映射 g,使得 $g'(\xi)=f(\xi)$. 特别地,I 到 Y 的连续映射与单调映射都存在原映射.

证 首先设 $f: I\to Y$ 为阶梯映射,例如写为

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\chi_{(\xi_k,\xi_{k+1})}(\xi), \quad \lambda_k\in Y,\xi\in I,$$

其中 $\chi_{(\xi_k,\xi_{k+1})}(\xi)$ 为(ξ_k,ξ_{k+1}) 的特征函数. 不难证明

$$g(\xi) = \lambda_j(\xi-\xi_j) + \sum_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\xi_{k+1}-\xi_k), \quad \xi\in[\xi_j,\xi_{j+1}]$$

是 f 在 I 中的原映射.

对于一般情形，只需利用定理 6.1，给出阶梯映射列$\{\varphi_n\}$，使得在 I 上 φ_n 一致收敛于规则映射 f. 求出 φ_n 的原映射 g_n，然后利用分析学中的常用技巧，不难证明原映射序列 g_n 在 I 上一致收敛于一个规则映射 g，它就是 f 的原映射.

定义 6.4 设 $f,g: I\to Y$ 为规则映射. 若 g 为 f 的原映射，对于 I 中任意两点 $a,b\in I,a<b$，我们称差 $g(b)-g(a)$为 f 在 a 与 b 之间的积分，记为

$$\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi = g(b)-g(a).$$

类似于微积分学的积分公式，我们有

定理 6.4（换元公式） 设 $\varphi: I\to\mathbb{R}$ 为定义在 I 上的某一个规则映射的原映射，$f: J\to Y$ 为规则映射，这里 J 为 $\mathbb{R}$ 中的区间，且 $J\supset\varphi(I)$. 若 f 为连续映射，或者 φ 为单调函数时，对任意 $a,b\in I$，$a<b$，有

$$\int_b^b f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\beta)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

证明由复合映射求导法则与积分定义可得.

定理 6.5（分部积分公式） 设 X,Y,Z 为 Banach 空间. $f: I\to Z$ 为规则映射的原映射，$g: I\to Y$ 也是规则映射的原映射. 若记 $(x,y)\to[x,y]$为 $X\times Y$ 到 Z 的连续二重线性映射，则对任意两点 $a,b\in I,a<b$，有

$$\int_a^b [f(\xi),g'(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$= [f(b),g(b)]-[f(a),g(a)]-\int_a^b [f'(\xi),g(\xi)]\mathrm{d}\xi.$$

证明也只需验证$[f,g']$与$[f',g]$为规则映射，再利用二重线性映射的求导公式验证它符合定义 6.4 就够了.

定理 6.6（积分中值定理） 设 $f: I\to Y$ 为规则映射，则对任意两点 $a,b\in I,a<b$，有

$$\left\|\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\| \leqslant \int_a^b \|f(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi \leqslant (b-a)\sup_{\xi\in I}\|f(\xi)\|.$$

证 只需证明

$$\left\|\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\| \leqslant \int_a^b \|f(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi.$$

注意到，由 f 的规则性可得 $\|f\|$ 的规则性. 又若令 g 满足 $g'(\xi)=f(\xi)$，k 满足 $k'(\xi)=\|f(\xi)\|$，我们得到

$$\|g'(\xi)\| = \|f(\xi)\| = k'(\xi).$$

于是，由定理 4.1 可得

$$\|g(b)-g(a)\| \leqslant k(b)-k(a),$$

这就是

$$\left\|\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\| \leqslant \int_a^b \|f(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi.$$

其余一些性质，例如，积分代入线性映射、积分与极限交换次序等，我们留作习题.

记 $\mathscr{E}_Y^{(p)}(A)$ 为 A 到 Y 的所有 p 次连续可导映射的集合，我们有 Taylor 公式：

定理 6.7 设 (α,β) 为 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间，$f\in\mathscr{E}_Y^{(p)}((\alpha,\beta))$，则对 (α,β) 中任意的 ξ,ξ_0，有

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(\xi_0) + \frac{\xi-\xi_0}{1!}f'(\xi_0) + \frac{(\xi-\xi_0)^2}{2!}f''(\xi_0) \\ &\quad + \cdots + \frac{(\xi-\xi_0)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\xi_0) \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi}\frac{(\xi-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

证 利用下面的结果：

设 X,Y 为 Banach 空间，

$$f\in\mathscr{E}_X^{(p)}((\alpha,\beta)),\quad g\in\mathscr{E}_Y^{(p)}((\alpha,\beta)).$$

若 $(x,y)\to[x,y]$ 为 $X\times Y$ 到 Z 的连续二重线性映射，则

$$\begin{aligned} &[f,\mathrm{D}^p g]-(-1)^p[\mathrm{D}^p f,g] \\ &\quad = \mathrm{D}([f,\mathrm{D}^{p-1}g]-[\mathrm{D}f,\mathrm{D}^{p-2}g]+\cdots \\ &\qquad + (-1)^{p-1}[\mathrm{D}^{p-1}f,g]). \end{aligned}$$

把上述公式应用到映射 $(\lambda,x)\to\lambda x$ 与 $g(\zeta)=\dfrac{(\xi-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}$ 上，然后在两边取积分便得.

§7 隐函数定理，反函数定理，秩定理

隐函数定理、反函数定理和秩定理皆属于存在性定理的范畴，它们在许多数学分支中有很广泛的应用.

先叙述一个压缩映射的定理.

定理 7.1 设 X,Y 为 Banach 空间，$U=B(0,\alpha)$ 与 $V=B(0,\beta)$ 分别为以 X 与 Y 中的零元为中心，α,β 为半径的开球，$v:U\times V\to Y$ 为连续映射，若 v 满足

(1) $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|\leqslant k\|y_1-y_2\|$，其中 $0<k<1$，$x\in U,y_1,y_2\in V$；

(2) $\|v(x,0)\|<\beta(1-k)$，$x\in U$，

则存在唯一的连续映射 $f:U\to V$，满足

$$f(x)=v(x,f(x)).$$

用熟知的逐次逼近法可证得此定理：取 $y_0=0,y_n=v(x,y_{n-1})$，然后证明$\{y_n\}$为 Cauchy 序列（此方法在大学数学教程中已遇到过多次，这里就不赘述了）.

定理 7.2（隐函数定理） 设 X,Y,Z 为 Banach 空间，$A\subset X\times Y$ 为开子集. 若映射 $f:A\to Z$ 满足

(1) f 在 A 上连续可导；

(2) 对$(x_0,y_0)\in A$，有 $f(x_0,y_0)=0$；

(3) $\partial_2 f(x_0,y_0)$为 Y 到 Z 的线性同胚.

则存在 x_0 的开邻域 U_0，使得

(a) 对 U_0 的每个连通开子集 $U,x_0\in U$，存在唯一的连续映射 $u:U\to Y$，满足 $u(x_0)=y_0$；并且对每个 $x\in U$，有

$$(x,u(x))\in A\quad 与\quad f(x,u(x))=0.$$

(b) 上述 u 在 U 中连续可导,并有下式成立

$$u'(x) = -(\partial_2 f(x,u(x)))^{-1} \circ (\partial_1 f(x,u(x))).$$

证 由条件(3)知,

$$\partial_2 f(x_0,y_0) \equiv T_0 \in \mathscr{L}(Y;Z),$$

并存在 $T_0^{-1} \in \mathscr{L}(Z;Y)$. 易见, $f(x,y)=0$ 有等价形式

$$y = y - (T_0^{-1} \circ f)(x,y),$$

从而只要对后者证明就够了.

令 $y-(T_0^{-1} \circ f)(x,y) \equiv g(x,y)$, 则

$$\begin{aligned} & g(x,y_1) - g(x,y_2) \\ &= y_1 - y_2 - T_0^{-1}(f(x,y_1) - f(x,y_2)) \\ &= T_0^{-1}\{\partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y_1 - y_2) \\ &\quad - (f(x,y_1) - f(x,y_2))\}. \end{aligned}$$

由中值定理、$\partial_2 f(x_0,y_0)$的连续性,以及 T_0^{-1} 的连续性,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在

$$U_0 = B(x_0,\alpha), \quad V_0 = B(y_0,\beta),$$

使当 $x \in U_0, y_1, y_2 \in V_0$ 时,有

$$\begin{aligned} \|g(x,y_1) - g(x,y_2)\| &\leqslant \|T_0^{-1}\| \cdot \varepsilon \|y_1 - y_2\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|, \end{aligned} \tag{7.1}$$

这里取 $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2\|T_0^{-1}\|}$. 另一方面,由

$$g(x,y_0) - y_0 = -(T_0^{-1} \cdot f)(x,y_0)$$

得

$$\|g(x,y_0) - y_0\| < \frac{\beta}{2}. \tag{7.2}$$

由(7.1)和(7.2)式,并据定理 7.1,存在唯一的映射 $u: U_0 \to V_0$,使对每个 $x \in U_0$ 都有 $f(x,u(x))=0$. 对于 U_0 的任一连通开子集 U, $x_0 \in U$,易证(a)的结论成立.

对于(b),我们证明 u 的导数为

$$-(\partial_2 f(x,u(x)))^{-1}\circ(\partial_1 f(x,u(x))).$$

令

$$S(x)=\partial_1 f(x,u(x)),\quad T(x)=\partial_2 f(x,u(x)),$$

并设 $T\in\mathscr{L}(Y;Z)$ 为同胚. 由 f 的连续可导性，对任一个 $x\in U$，且 $x+s\in U$，记

$$t=u(x+s)-u(x).$$

于是任给 $\delta>0$，存在 $r>0$，使当 $\|s\|\leqslant r$ 时，有

$$\begin{aligned}&\|f(x+s,u(x+s))-f(x,u(x))\\&\qquad-\partial_1 f(x,u(x))\cdot s-\partial_2 f(x,u(x))\cdot t\|\\&\leqslant\delta(\|s\|+\|t\|).\end{aligned}$$

由 $f(x+s,u(x+s))=f(x,u(x))=0$，上式成为

$$\|S(x)\cdot s+T(x)\cdot t\|\leqslant\delta(\|s\|+\|t\|).$$

先取 $\delta>0$，使 $\delta\|T^{-1}(x)\|\leqslant 1/2$；再令

$$a=1+2\|T^{-1}(x)\cdot S(x)\|,$$

便不难从不等式 $\|S(x)\circ s+T(x)\circ t\|\leqslant\delta(\|s\|+\|t\|)$ 推得

$$\|(T^{-1}(x)\circ S(x))\cdot s+t\|\leqslant\delta\|T^{-1}(x)\|(\|s\|+\|t\|)\tag{7.3}$$

与

$$\|t\|-\frac{a-1}{2}\|s\|\leqslant\frac{1}{2}(\|t\|+\|s\|).\tag{7.4}$$

(7.4)蕴涵 $\|t\|\leqslant a\|s\|$. 而由(7.3)知，当 $\|s\|\leqslant r$ 时，有

$$\begin{aligned}&\|t+T^{-1}(x)\circ S(x)\cdot s\|\\&\leqslant\delta(a+1)\|T^{-1}(x)\|\cdot\|s\|.\end{aligned}$$

注意到 $t=u(x+s)-u(x)$，便得(b)，从而定理得证.

当取 $X=\mathbf{K}^m, Y=Z=\mathbf{K}^n$，$m,n$ 为正整数时，有如下定理：

定理 7.3 设 f_i 为 $U\times V\to\mathbf{K}$ 的连续可导函数，$1\leqslant i\leqslant n$. 设

$$(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)\in U\times V\subset\mathbf{K}^m\times\mathbf{K}^n,$$

且有

$$f_i(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)=0.$$

若 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$ 在$(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)$不为 0，则存在$(a_1,\cdots,a_m)$的开邻域 $W_0\subset U$，使对$(a_1,\cdots,a_m)$的任一连通开邻域 $W\subset W_0$，有唯一的一组函数 $g_i(1\leqslant i\leqslant n)$在 W 中连续，且满足

$$g_i(a_1,\cdots,a_m)=b_i,\quad i=1,\cdots,n,$$

而对每个 i 与每个点$(x_1,\cdots,x_m)\in W$，下式成立：

$$f_i(x_1,\cdots,x_m,g_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_m))=0.$$

此外，g_i 在 W 中连续可导，且

$$\partial_j g_i(x)=-\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\right)^{-1}\circ\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\bigg|_{y_i=g_i(x_1,\cdots,x_m)},$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

反函数定理如下.

定理 7.4(反函数定理) 设 X,Y 为 Banach 空间，V 为 $x_0\in X$ 的开邻域. 若 $f:V\to Y$ 为连续可导映射，且 $f'(x_0)$为 X 到 Y 上的线性同胚，则存在 x_0 的一个开邻域 $U\subset V$，使得 $f|_U:U\to W$ 为同胚映射，这里 $W\subset Y$ 为 $y_0=f(x_0)$的开邻域. 进而，若 f 在 U 内是 p 次连续可导的，则 $f(U)$到 U 上的逆映射 g 在 $f(U)$中也是 p 次连续可导的.

证 令 $h(x,y)=f(x)-y$，把定理 7.2 应用到 h 上去，并注意到 $\partial_1 h(x_0,y_0)=f'(x_0)$，便得到逆映射 g 的存在性. g 的 p 次可导性可类似地得到(可利用本章习题 30 的结果).

转而讨论秩定理. 先给出秩的定义.

定义 7.1 设 X,Y 为有限维 Banach 空间，维数为 $\dim X=n$，$\dim Y=m$，$A\subset X$ 为开子集. $f:A\to Y$ 为连续可导映射，线性映射 $f'(x)$在 $x\in A$ 的秩是指：在 $f'(x)$关于 X 与 Y 的两个基的矩阵中，非零子式的最大阶数. 亦即，若在 $f'(x)$关于 X 与 Y 的两个基的矩阵中，至少有一个 p 阶子式$\neq 0$，则 p 称为 $f'(x)$在 x 的秩，记为 $\operatorname{rank}f'(x)$.

由于上述子式都是 x 的连续函数，故若 $f'(x_0)$的秩为 p，则存在 x_0 的邻域U，使当 $x\in U$ 时，$f'(x)$的秩至少是 p，但却可能大于 p. 秩定理讨论 $f'(x)$的秩为常数时映射的性质.

定理 7.5(秩定理) 设 X 为 n 维 Banach 空间，Y 为 m 维 Banach 空间，$A\subset X$ 为 $a\in X$ 的一个开邻域，$f: A\to Y$ 为连续可导映射(或 C^q 映射). 若 $\mathrm{rank} f'(x)|_A = p$ 为常数，则

(1) 存在 a 的开邻域$U\subset A$ 及

$$u: U \to I^n = \{x \in \mathbb{K}^n : |x_i| < 1, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

使 u 为 U 到 $\mathbb{K}^n$ 中的单位方体 I^n 上的同胚，且 u 与 u^{-1}连续可导(或 C^q 可导).

(2) 存在 $b=f(a)$的开邻域 $V\subset Y$，且 $V\supset f(U)$，以及映射

$$v: I^m = \{y \in \mathbb{K}^m : |y_i| < 1, 1 \leqslant i \leqslant m\} \to V,$$

使 v 为 I^m 到 V 上的同胚，且 v 与 v^{-1}连续可导(或 C^q 可导).

(3) 上述 u,v 满足 $f=v\circ f_0\circ u$，其中 $f_0: I^n\to I^m$ 为映射

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0).$$

秩定理的证明具有较高的技巧，是一种构造性的证明，其主要思想是利用秩 p 为常数，具体构造出 u 与 v，并证明它们同胚，而且还要证明 4 个映射：u, u^{-1}, v, v^{-1}连续可导，并满足

$$f = v \circ f_0 \circ u.$$

我们这里仅给出证明的要点，详细证明见参考书目[6].

证 为简便起见，设数域 $\mathbb{K}$ 为 $\boldsymbol{R}$，且 $A=X, a=0$. 证明分三个步骤.

步骤一. 构造 $u: U_0\to I^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n : |x|<1, 1\leqslant i\leqslant n\}$，使它为 U_0 到 I^n 上的同胚，且 u, u^{-1}连续可导.

由 $\mathrm{rank} f'(x)|_A = p$，令

$$M = \{x \in X : f'(0) \cdot x = 0\},$$

它是线性映射 $f'(0)$的核，并且是 X 的维数为 $\dim M = n - p$ 的线性子空间. 取 M 在 X 中的直交补 N，即 $X=N\oplus M$. 分别取 N 与 M 的基为$(c_1, \cdots, c_p)$与$(c_{p+1}, \cdots, c_n)$，则 X 的基可取为$(c_1, \cdots, c_p,$

$c_{p+1},\cdots,c_n$). 于是,$x\in X$ 可表示为

$$x=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)c_j,$$

这里 φ_j 是唯一确定的 x 的线性映射.

取 $\boldsymbol{R}^n$ 的标准基 $e_1,\cdots,e_n$,对上面的 $x\in X$,定义一个映射

$$G:x\to\sum_{j=p+1}^{n}\varphi_j(x)e_j.$$

于是,对于 X 中的点 x,取其在基$(c_1,\cdots,c_n)$之下的坐标$(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))$的后面 $n-p$ 个,构作一个元

$$\sum_{j=p+1}^{n}\varphi_j(x)e_j,$$

此元属于 $\boldsymbol{R}^{n-p}$. 这样,$G:X\to\boldsymbol{R}^{n-p}$是一个线性映射.

另一方面,令 $f'(0)(X)=P\subset Y$ 为 X 在映射 $f'(0)$之下的像,它是 Y 的一个 p 维子空间. 不难看出,$f'(0)\cdot c_1,\cdots,f'(0)\cdot c_p\in Y$ 是线性无关的. 取 Y 的基为

$$(f'(0)\cdot c_1,\cdots,f'(0)\cdot c_p,d_{p+1},\cdots,d_m),$$

故 $y\in Y$ 可表示为

$$y=\sum_{j=1}^{p}\psi_j(y)f'(0)\cdot c_j+\sum_{j=p+1}^{m}\psi_j(y)d_j.$$

令 $H:y\to\sum_{j=1}^{p}\psi_j(y)e_j$, 则 $H:\boldsymbol{R}^p\subset\boldsymbol{R}^m$ 为线性映射. 作

$$g:x\to g(x)=H(f(x))+G(x),$$

因为 H 是连续线性映射,f 连续可导,故 g 为连续、线性与可导的,其导数为

$$g'(x)\cdot s=H(f'(x)\cdot s)+G(s).$$

把 $g'(0)\in\mathscr{L}(X;\boldsymbol{R})$用 X 的基$(c_1,\cdots,c_n)$与 $\boldsymbol{R}^n$ 的基$(e_1,\cdots,e_n)$表示,即

$$g'(0)\cdot c_j=e_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\begin{bmatrix} g_1'(0)\cdot c_1 & \cdots & g_1'(0)\cdot c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n'(0)\cdot c_1 & \cdots & g_n'(0)\cdot c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

由此断定$(g'(0))^{-1}$存在. 据反函数定理 7.4,存在 X 的零元 θ 的开邻域 U_0 与 $\boldsymbol{R}^n$ 的零元 0 的开邻域 V_0,使 $g: U_0\to V_0$ 为一同胚,且 g^{-1}在 V_0 中连续可导. 取 $\boldsymbol{R}^n$ 中的球 $B(0,r)$,使其含于 $g(U_0)$ 中. 又令

$$U = g^{-1}(B(0,r)) \subset U_0.$$

于是,记

$$u : x \to \frac{1}{r}g(x) = \frac{1}{r}H(f(x)) + \frac{1}{r}G(x)$$
$$\equiv z_1 + z_2, \qquad (7.5)$$

其中

$$z_1 = \frac{1}{r}H(f(x)) \in \boldsymbol{R}^p, \quad z_2 = \frac{1}{r}G(x) \in \boldsymbol{R}^{n-p}.$$

这就完成了满足(1)的函数 u 的构造.

步骤二. 构造 v. 类似于步骤一的方法,对 $x\in X$,记 $P_x\equiv f'(x)(X)$,并在 $x\in U_0$ 中作映射:

$$x \to g(x) = H(f(x)) + G(x).$$

仍以 M 记线性映射 $f'(x)(X)$ 的核,N 记 M 的直交补. 于是 $f'(x)|_N : N\to P_x$ 与 $H : P_x\to \boldsymbol{R}^p$ 为线性的、一对一的满射. 令

$$L_x : \boldsymbol{R}^p \to P_x$$

为 H 的逆映射,从而 $f'(x)=L_x\circ H\circ f'(x)$.

另一方面,按步骤一的方法构造 $u : U\to I^n$,它是 U 到 I^n 上的同胚,故可作 $u^{-1} : I^n\to U\subset X$,并得到一个映射

$$f\circ u^{-1} : I^n \to Y.$$

视 I^n 为 $I^n=I^p\times I^{n-p}$,于是,

$$z = z(z_1,z_2) \to f\circ u^{-1}(z) = f(u^{-1}(z_1,z_2))$$
$$\equiv f_1(z_1,z_2). \qquad (7.6)$$

我们证明，f_1 是与 z_2 无关的(亦即证明 $\partial_2 f_1(z_1,z_2)=0$)，并且是 I^p 到 Y 的连续可导映射.

事实上，由

$$\begin{aligned} f(x) &= f(u^{-1}(z_1,z_2)) \equiv f_1(z_1,z_2) \\ &= f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right) \end{aligned}$$

推得

$$\begin{aligned} f'(x)\cdot t &= \partial_1 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)\cdot\frac{1}{r}H(f'(x)\cdot t) \\ &\quad + \partial_2 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)\cdot\frac{1}{r}G(t), \quad t\in X. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\partial_2 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)\cdot G(t) \\ &\quad = rf'(x)\cdot t - \partial_1 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right) \\ &\qquad \cdot H(f'(x)\cdot t), \end{aligned}$$

注意到 $rf'(x)\cdot t=rL_x\circ H\circ f'(x)\cdot t$，则

$$\begin{aligned} &\partial_2 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)\cdot G(t) \\ &\quad = S_x\cdot H(f'(x)\cdot t), \qquad t\in X, \end{aligned} \tag{7.7}$$

其中

$$S_x = rL_x - \partial_1 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)$$

为 $\boldsymbol{R}^p$ 到 Y 的线性映射(与 t 无关). 由于 $t\in N$ 蕴涵 $G(t)=0$，(7.7)式给出

$$S_x\cdot H(f'(x)\cdot t) = 0, \quad t\in N. \tag{7.8}$$

但是，$t\to H(f'(x)\cdot t)$ 为 $N\to\boldsymbol{R}^p$ 的一一满射，故(7.8)式蕴涵 $S_x=0$，$x\in U_0$. 这样，再利用(7.7)式便得到

$$\partial_2 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)),\frac{1}{r}G(x)\right)\cdot G(t) = 0, \quad t\in X, \tag{7.9}$$

即得 $G: X \to \boldsymbol{R}^{n-p}$ 为双方单值双方连续的. 由(7.9)式给出

$$\partial_2 f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)\right) = 0, \quad x \in U_0.$$

因为映射

$$x \to (z_1, z_2) = \left(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)\right)$$

为 U_0 到 I^n 的同胚,于是在 I^n 中下述等式成立

$$\partial_2 f_1(z_1, z_2) = 0.$$

由此,(7.6)式中的映射 $f_1(z_1,z_2)=f_1(z_1)$,也就是 $f_1: I^p \to Y$ 连续、可导. 这样,对每个 $x \in U$,有

$$f(x) = f_1\left(\frac{1}{r}H(f(x))\right).$$

现在将上式与(7.5)式中的 $u(x)=(z_1,z_2)$ 相比较,得到对每一个 $y \in f(U)$,有

$$y = f_1\left(\frac{1}{r}H(y)\right),$$

并且 $y \to \frac{1}{r}H(y)$ 有连续逆映射,故它是 $f(U)$ 到 $I_p(\subset \boldsymbol{R}^p)$ 的同胚,而 $z_1 \to f_1(z_1)$ 为逆同胚.

下面可以构造 v 了. 对于 Y 的基

$$\begin{aligned}(f'(x)\cdot c_1, \cdots, f'(x)\cdot c_p, d_{p+1}, \cdots, d_m)\\ \equiv (d_1, \cdots, d_p, d_{p+1}, \cdots, d_m),\end{aligned}$$

其中 $(d_1,\cdots,d_p) \in P_x$, $(d_{p+1},\cdots,d_m) \in Q_x$. 作 $\boldsymbol{R}^{m-p}$ 到 Q_x 上的一对一的连续线性映射 T,满足 $Te_j=d_j$, $j=p+1,\cdots,m$. 令

$$v: z \to v(z) = v(z_1, z_3) = f_1(z_1) + T(z_3). \qquad (7.10)$$

这就完成了 v 的构造.

步骤三. 证明所构造的 v 满足定理的要求. v 的连续、可导性由(7.10)式及 f_1 和 T 的连续、可导性得到. 下面证明 v 是双方单值的.

设 $v(z_1,z_3)=v(z_1',z_3')$,我们证明 $z_1=z_1'$, $z_3=z_3'$. 由 f_1 与

T 是可逆的，令

$$y = v(z_1, z_3) = f_1(z_1) + T(z_3) \in Y = P_x \times Q_x.$$

取 y 的前 p 个坐标，得到

$$H(y) = H(f_1(z_1)) = rz_1.$$

于是，

$$v(z_1, z_3) = v(z_1', z_3')$$

蕴涵

$$rz_1 = H(v(z_1, z_3)) = H(v(z_1', z_3')) = r z_1'.$$

从而 $z_1 = z_1'$. 另一方面，由 $v(z_1, z_3) = v(z_1', z_3')$ 得到 $T(z_1) = T(z_3)$，而 T 的单值性便给出 $z_1 = z_3'$. 故 v 是双方单值的，(7.2)式得证.

不难验证 v 满足反函数定理 7.4 的条件，因此(2)得证.

最后，取 $f_0: I^n \to I^m$ 为映射

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0),$$

立即得到 $f = v \circ f_0 \circ u$，定理得证.

以上三个定理都很重要，以后读者会看到它们的应用，例如在第二章中就会遇到.

§8 Schauder 不动点原理

在非线性分析理论中，不动点原理对研究存在性定理等问题是十分重要的. 本节我们将介绍其中一种应用非常广泛的不动点理论——Schauder 不动点原理.

我们首先叙述读者在点集拓扑教程中已熟悉的 Brouwer 不动点原理(它的证明见参考书目[1],[8],[16]).

定理 8.1 设 $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭单位球. 若此球上的映射 $f: \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ 为连续映射，则存在 $x_0 \in \overline{B}(0,1)$，使

$$f(x_0) = x_0.$$

满足 $f(x)=x$ 的元 x 称为 f 的不动点. 为讨论 Schauder 不动点原理,先引进紧映射的概念并证明几个引理.

定义 8.1 设 M 为 Bauach 空间 X 的子集. $f: M \to M$ 为连续映射,称 f 为紧映射,若对 M 的任意有界子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,序列 $\{f(x_n)\} \subset M$ 有收敛的子序列.

引理 8.1 设 M 为 Banach 空间 X 中的有界子集; $f_n: M \to M$ 为紧映射列, $n=1,2,3,\cdots$. 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 M 上一致收敛于映射 $f_0: M \to M$,则

$$\overline{\{f_0(x): x \in M\}}$$

为 X 中的紧集.

证明可按下述思想进行:由 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为紧算子列,其每个元 f_n 是连续的,从而得到 $\{f_n(x): x \in M\}$ 的准紧性. 再由 f_n 一致收敛于 f_0,得到 $\{f_0(x): x \in M\}$ 有有限 ε-网. 因 X 为完备的,这就等价于 $\{\overline{f_0(x): x \in M}\}$ 为列紧集. 但它为闭集,从而自列紧,故在 Banach 空间中又等价于紧性.

引理 8.2 设 M 为 Banach 空间 X 中的有界子集. 若 $f: M \to M$ 为紧映射,则存在 X 到 X 上的映射连续列 $\tilde{f}_n: X \to X$,使

(1) $\tilde{f}_n$ 在 M 上一致收敛于 f,

(2) $\{\tilde{f}_n(M)\}$ 生成 X 的有限维子空间.

证 由 f 为紧映射知 $\{\overline{f_0(x): x \in M}\}$ 为紧集,因而是准紧的,故对于任意给定的 $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \to 0$,存在 $x_i^n, i=1,\cdots,m$,使

$$\| f(x) - x_i^n \| < \varepsilon_n, \quad x \in M. \tag{8.1}$$

在 $\overline{f(M)}$ 上定义 $f_n(x)$ 如下:

$$f_n(x) = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(n)}(x) x_i^n \right\}}{\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(n)}(x) \right\}}, \quad x \in \overline{f(M)},$$

其中

$$\alpha_i^{(n)}(x)=\begin{cases}\varepsilon_n-\|x-x_i^n\|, & 若\ \|x-x_i^n\|<\varepsilon_n,\\ 0, & 若\ \|x-x_i^n\|\geqslant\varepsilon_n.\end{cases}$$

由定义可见，f_n 把由$\{x_1^n,\cdots,x_m^n\}$生成的凸包 H 映到它自身，$f_n(H)\subset H$. 这里所谓的凸包 H 是由$\{x_1^n,\cdots,x_m^n\}$产生的凸组合

$$H=\left\{x=\sum_{i=1}^{m}r_ix_i^n:\ \sum_{i=1}^{m}r_i=1,r_i\geqslant 0\right\}.$$

容易验证 f_n 的连续性. 现在定义 X 上的序列

$$\tilde{f}_n(x)=\begin{cases}f_n(f(x)), & x\in M,\\ 0, & x\in X-M.\end{cases}$$

于是，对 $x\in M$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_n(x)-f(x)\|&=\|f_n(f(x))-f(x)\|=\|f_n(y)-y\|\\&=\frac{\left\|\sum\alpha_i^n(y)(y-x_i^n)\right\|}{\left\{\sum\alpha_i^n(y)\right\}}\\&=\frac{\left\|\sum\alpha_i^n(f(x))(f(x)-x_i^n)\right\|}{\left\{\sum\alpha_i^n(f(x))\right\}}\leqslant\varepsilon_n.\end{aligned}$$

故 $\tilde{f}_n\to f$ 在 M 上一致成立. 至于(2)，对每个固定的 n，$\{f_n(M)\}$ 实际上是 X 的有限维子空间. 引理得证.

若假设 M 为 X 的紧凸子集，则 f 可减弱为只具有连续性，也有与引理 8.2 类似的结论，即

引理 8.3 设 M 为 Banach 空间 X 的紧凸子集. 若 $f:M\to M$ 为连续映射，则存在连续映射序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，$f_n:M\to M$，满足

(1) f_n 在 M 上一致收敛于 f,

(2) $\{f_n(M)\}$含在 X 的一个有限维子空间中.

证明与引理 8.2 类似，只是取$\{x_1^n,\cdots,x_m^n\}$为 M 的 ε_n-网的中心，并令

$$\mu_i^n(x) = \begin{cases} \| x - x_i^n \|, & 若 \ \| x - x_i^n \| \leqslant \varepsilon_n/2, \\ \varepsilon_n - \| x - x_i^n \|, & \varepsilon_n/2 < \| x - x_i^n \| \leqslant \varepsilon_n, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

引理 8.4 设 X, Y 为 Banach 空间，$E \subset X$ 为有界子集，T，$T_n : E \to X$ 为 E 上的映射，$n=1,2,\cdots$. 若 $\{T_n\}$ 为紧映射列，且在 E 上一致收敛于 T，则集

$$\widetilde{E} = \overline{\bigcup_n T_n E}$$

为紧集，其中 $T_n E = \{T_n x : x \in E\}$.

证 因 T_n 为紧映射，故 $\overline{T_n E}$ 为紧集. 由 T_n 在 E 上一致收敛于 T，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N_\varepsilon > 0$，使当 $n > N_\varepsilon - 1$ 时，有

$$\| T_n x - T x \| \leqslant \varepsilon/3, \quad x \in E. \tag{8.2}$$

对于这个 N_ε，$\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon - 1} \overline{T_i E}$ 为紧集. 据此与(8.1)式，不难证明 $\bigcup_{n \geqslant N_\varepsilon} \overline{T_n E}$ 具有有限 ε-网. 但 X 为完备空间，故

$$\overline{\bigcup_{n \geqslant N_0} \overline{T_n E}}$$

为紧集. 令

$$\widetilde{E}_1 = \overline{\bigcup_{n \geqslant N_0} T_n E},$$

我们有

$$\widetilde{E}_1 \subset \overline{\bigcup_{n \geqslant N_0} \overline{T_n E}},$$

因此 $\widetilde{E}_1$ 为紧集. 也就得到

$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_1 \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{N_0 - 1} T_n E} = \widetilde{E}_1 \cup \bigcup_{n=1}^{N_0 - 1} \overline{T_n E}$$

为紧集.

下面是 Schauder 不动点的两种形式.

定理 8.2 设 M 为 Banach 空间 X 中的有界闭凸集. 若 $f : M$

$\to M$ 为紧映射，则存在 $x_0\in M$，使 $f(x_0)=x_0$.

证 因 f 为紧映射，据引理 8.2，对任给的 $\varepsilon_n>0,\varepsilon_n\to 0$，存在一连续映射序列 $\tilde{f}_n: X\to X$，使在 M 上，$\tilde{f}_n$ 一致收敛于 f，并且存在由 $\{x_1^n,\cdots,x_m^n\}$ 生成的凸包

$$E_n = H\{x_1^n,\cdots,x_m^n\},$$

对每个 n，E_n 为有界凸集，它有非空内部，并且还是闭集，通常称为凸体(Banach 空间中具有非空内部的有界闭凸集，称为凸体).

可以证明，X 中的任一凸体与单位闭球 $\overline{B}(0,1)$ 同胚，从而凸体也是紧集，并且还满足：存在连续函数序列 $\tilde{f}_n$ 及上述的 E_n，使得 $\tilde{f}_n(E_n)\subset E_n$ 及 $\|\tilde{f}_n(x)-x\|\leqslant\varepsilon_n$.

由此可见，每个 $\tilde{f}_n$ 为紧映射. 据定理 8.1，对每个 $n\in N$，存在 $x_n\in E_n$，使得 $T_nx_n=x_n$. 又据引理 8.4，

$$\{x_n\}\subset\bigcup \tilde{f}_nM=\widetilde{E},$$

$\{x_n\}$ 含在紧集 $\widetilde{E}$ 中，故存在收敛子序列，例如假设就是 x_n 自身，使 $x_n\to x_0$，且 $x_0\in M$. 这个 x_0 就是 f 的不动点. 事实上，由

$$\|f(x_0)-x_0\|\leqslant\|f(x_0)-\tilde{f}_n(x_0)\|+\|\tilde{f}_n(x_0)-x_0\| + \|x_n-x_0\|$$

便可断言 $f(x_0)=x_0$，定理得证.

定理 8.3 设 M 为 X 中的紧凸集. 若 $f: M\to M$ 为连续映射，则存在 $x_0\in M$，使 $f(x_0)=x_0$.

证明类似于定理 8.2 的证明，只是要应用引理 8.3，我们将它留作习题.

Schauder 定理还有一些推广的形式，不一一介绍了. 习题 35 与习题 36 是它的两个应用.

习　　题

1. 设 (x_{mn})，$m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$ 为赋范线性空间 X 中的二重序列. 若

(1) 对每个 $m\geqslant 0$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_{mn}$ 在 X 中收敛，且 y_m 为其和；

(2) 对每个 $n\geqslant 0$,级数 $\sum_{m=0}^{\infty} r_{mn}$ 收敛,且其和为 t_n,这里

$$r_{mn}=y_m-\sum_{k=0}^{n}x_{mk}=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_{mk},$$

称为级数的第 n 余项. 试证:

(1) 对每个 $n\geqslant 0$,级数 $\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn}$ 收敛,设其和为 z_n;

(2) $\sum_{m=0}^{\infty} y_m=\sum_{n=0}^{\infty} z_n$,当且仅当$\lim_{n\to\infty} t_n=0$.

2. 试证定理 1.5 与定理 1.6.

3. 设 $u_{mn}=\dfrac{1}{m^2-n^2}, m\neq n$,且 $u_{nn}=0$,试证

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_{mn}\Big)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}u_{mn}\Big).$$

4. 试证定理 2.1 与定理 2.4.

5. 设 X 为实 Hilbert 空间,$x\to\|x\|^2=\langle x,x\rangle$是 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射,这里$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 X 的内积. 试求此映射在 $x\in X$ 的导数.

6. 设 $X,Y_1,\cdots,Y_m$ 为 Banach 空间,$f: X\to Y_1\times\cdots\times Y_m$ 为连续映射,$f=(f_1,\cdots,f_m)$. 试证:f 在 $x_0\in A\subset X$(A 为 X 中的开集)可导,当且仅当每个 f_i 在 x_0 可导,且有

$$f'(x_0)=(f_1'(x_0),\cdots,f_m'(x_0)).$$

7. 设 $X=Y=\boldsymbol{R}$,$f: X\to Y$ 为 $f(x)=\sin x, a^x, \ln x$,试求 Fréchet 意义下的导数 f'.

8. 设 X,Y,Z 为三个 Banach 空间. 试证 $\mathscr{L}(X;Y)\times\mathscr{L}(Y;Z)$ 到 $\mathscr{L}(X;Z)$的映射$(u,v)\to u\circ v$ 是可导的,且其导数为

$$(s,t)\to v_0\cdot s+t\cdot u_0,$$

其中点$(u_0,v_0)\in\mathscr{L}(X;Y)\times\mathscr{L}(Y;Z)$.

9. 试证:对于 $f: A\to Y$ 为可导映射,f' 在 $x_0\in A$ 连续,当且仅当对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $\|s\|\leqslant\delta$, $\|t\|\leqslant\delta$ 时,有

$$\|f(x_0+s)-f(x_0+t)-f'(x_0)\cdot(s-t)\|\leqslant\varepsilon\|s-t\|.$$

10. 称 $f: A\to Y$ 在 $x_0\in A$ 为强可导映射,若 f 在 x_0 可导,且对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $\|s\|\leqslant\delta$, $\|t\|\leqslant\delta$ 时,有

$$\|f(x_0+s)-f(x_0+t)-f'(x_0)\cdot(s-t)\|\leqslant\varepsilon\|s-t\|.$$

试证:两个强可导映射的复合映射(若复合为可能时)也是强可导的.

11. 设 $X=X_1\times\cdots\times X_n\to Y$, f 为 X 中开集 A 到 Y 的连续可导映射,对每个 $j(1\leqslant j\leqslant n)$, $g_j: Z\to X_j$ 为 Banach 空间 Z 中开子集 G 到 X_j 的连续可导映射,且对每个 $z\in G$ 有 $(g_1(z),\cdots,g_n(z))\in A$. 试证:复合映射 $h=f\circ g$ 在 G 中连续可导,这里 $g=(g_1,\cdots,g_n)$,且有

$$\mathrm{D}h(z)=\sum_{k=1}^{n}(\partial_k f(g_1(z),\cdots,g_n(z))\circ \mathrm{D}g_k(z).$$

12. 设 A 为 X 中的开集, $f: A\to Y$ 为连续映射. 若对每个 $x\in A$,存在元 $u_x\in\mathscr{L}(X;Y)$,使对每个 $y\in X$,当 $t\neq 0$ 且 $t\to 0$ 时($t\in\boldsymbol{R}$),商

$$\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$$

的极限存在且等于 $u_x\cdot y$,而 $x\to u_x$ 为 A 到 $\mathscr{L}(X;Y)$ 的连续映射. 试证: f 在 A 中连续可导,且有 $\mathrm{D}f(x)=u_x, x\in A$.

13. 设 $f: A\to Y$ 为连续映射, A 为 X 中的开集. 若对任意 $x\in A$ 与 $y\in X$,

$$\lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}=g(x,y)$$

存在,这里 $t\in\boldsymbol{R}$. 又若对 $y_j\in X(j=1,2,\cdots,n)$ 与 $x_0\in A$,每个映射 $x\to g(x,y_j)$ 在 x_0 皆连续. 试证

$$g(x_0,y_1+\cdots+y_n)=\sum_{j=1}^{n}g(x_0,y_j).$$

14. 设 $f: A\to Y$ 为连续映射,这里开集 $A\subset X_1\times X_2$. 试证:为使 f 在 $(a_1,a_2)\in A$ 可导,当且仅当

(1) $\partial_1 f(a_1,a_2)$ 与 $\partial_2 f(a_1,a_2)$ 存在,

(2) 对任给 $\epsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $\|t_1\|\leqslant\delta$, $\|t_2\|\leqslant\delta$ 时,有

$$\|f(a_1+t_1,a_2+t_2)-f(a_1+t_1,a_2)-f(a_1,a_2+t_1)$$
$$+f(a_1,a_2)\|\leqslant\delta(\|t_1\|+\|t_2\|).$$

15. 设 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 定义如下

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

试证:$\partial_1 f$ 与 $\partial_2 f$ 在每一点 $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$ 存在,并且对于任意 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$,下列 4 个映射

$$x\to\partial_1 f(x,b),\quad y\to\partial_1 f(a,y),$$
$$x\to\partial_2 f(x,b),\quad y\to\partial_2 f(a,y)$$

在 $\boldsymbol{R}$ 中都连续,但 f 在 $(0,0)$ 不可导.

16. 设 A 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集. 若 $f:A\to Y$ 在 $x_0\in A$ 为二次可导. 试证:诸偏导数 $\partial_j f$ 在 x_0 都可导,而且对于 $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant n$ 下式皆成立

$$\partial_j\partial_k f(x_0)=\partial_k\partial_j f(x_0).$$

17. 试证:两个 p 次连续可导映射的复合(若复合有意义)也是 p 次连续可导映射.

18. 用 §3 中定理 3.2 的记号,试证:$\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^{-1}$ 上的映射 $\varphi:u\to u^{-1}$ 是无限次可导的.

19. 设 $f:(\alpha,\beta)\subset\boldsymbol{R}\to Y$ 为 n 次可导映射. 试证:对于任意 $x\in I$,只要 $1/x\in I$,就有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\mathrm{D}^n\left\{x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

20. 设 $X=Y$ 为 Banach 空间,试证:X 上的有界线性映射 T 是二次 F-可导的,并求出其二次 F-导数.

21. 设 X 是 Hilbert 空间,T 是其上的有界线性自伴算子. 试证:X 上的二次线性泛函

$$T(x)=\frac{1}{2}\langle Tx,x\rangle$$

是二次 F-可导的，且 $T''(x)(s,t)=\langle Ts,t\rangle$.

22. 设 $X=C([0,1])$，$Y=\mathbf{R}$. 试证：泛函 $f(x)=x^2(y)$，$y\in[0,1]$有二次 F-导数，且

$$f'(x)(s)=2x(y)s(y),\quad y\in[0,1],$$
$$f''(x)(s,t)=2s(y)t(y),\quad y\in[0,1].$$

23. 设 X,Y 为 Banach 空间，$A\subset X$ 为开集，映射 $f\in C^k(A,Y)$. 试证：对于 x_0，有

$$\frac{\partial^k}{\partial s_1\cdots\partial s_k}f\left(x_0+\sum_{j=1}^{\infty}s_jh_j\right)\bigg|_{s_1=\cdots=s_k=0}$$
$$=f^k(x_0)\cdot(h_1,\cdots,h_k).$$

24. 设 $f:[\alpha,\beta]\to Y$ 为规则映射，$u:Y\to Z$ 为 Banach 空间 Y 到 Z 的连续线性映射. 试证

$$\int_\alpha^\beta u(f(\xi))\mathrm{d}\xi=u\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right).$$

25. 试证定理 6.4 和定理 6.5.

26. 设 $g_n:[\alpha,\beta]\to Y$ 为规则映射序列. 若在$[\alpha,\beta]$上 g_n 一致收敛于 $g:[\alpha,\beta]\to Y$. 试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta g_n(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_\alpha^b g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

27. 设 $u_n:[\alpha,\beta]\to Y$ 为规则映射序列. 若级数$(u_n)_{n\geqslant0}$在$[\alpha,\beta]$上为 Y 中的范数收敛级数，亦即$(\|u_n\|)_n\geqslant0$ 收敛，且 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u$. 试证：以$\int_\alpha^\beta u_n(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为一般项的级数绝对收敛，且下式成立

$$\int_\alpha^\beta u(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

28. 设 $f:I\to X$，$h:I\to Y$ 为两个规则映射，这里 $I=[\alpha,\beta]$. 又设$(x,y)\to[x,y]$为 $X\times Y$ 到 Z 的连续二重线性映射，试证

$$\lim_{s\to0,s>0}\int_\alpha^\beta[f(t),h(t+s)]\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta[f(t),h(t)]\mathrm{d}t.$$

29. 试证定理 7.1.

30. 若定理 7.2 的假设条件满足，再设 f 在(x_0,y_0)的邻域内 p 次连续可导，试证：u 在 x_0 的某一邻域中也是 p 次可导的.

31. 设 $f: A\to Y$ 为连续映射，$A\subset X$ 为开子集，$x_0\in A$. 若 f 在 x_0 可导，并且 $f'(x_0)$为 X 到其在 Y 中的像集上的线性同胚. 试证：存在 x_0 的邻域 $U\subset A$，使对每个 $x\in U$，且 $x\neq x_0$ 有 $f(x)\neq f(x_0)$.

32. 试证定理 7.3.

33. 试证定理 8.3.

34. 设 $f=(f_1,f_2): \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$，$f_1,f_2$ 由 $f_1(x_1,x_2)=x_1$ 及

$$f_2(x_1,x_2)=\begin{cases}x_2-x_1^2, & x_1^2\leqslant x_2,\\ (x_2^2-x_1^2x_2)/x_1^2, & 0\leqslant x_2<x_1^2,\\ -f_2(x_1,-x_2), & x_2\geqslant 0\end{cases}$$

给出. 试证：f 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中任一点可导，且在$(0,0)$点，$\mathrm{D}f$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 到自身的恒同映射，但 $\mathrm{D}f$ 不连续.

35. 应用 Schauder 不动点原理证明：若 f 为定义在

$$\mathrm{D}=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: |x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$$

上的实值连续函数，则微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 存在满足条件 $y_0=y(x_0)$的解 $y=y(x)$.

36. 设 X 为 Banach 空间，$f\in C^1(X,X)$. 若 $x(t): \boldsymbol{R}\to X$ 在其定义域内的任何有限区间上，$\|f(x(t))\|$ 有界，试求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x(t))$ 的解.

第二章　流形上的微积分

20 世纪很多著名数学家都预感到：流形在未来数学研究中必将起重要作用. 很多数学分支，如微分方程、大范围分析等，都已把流形上的微积分作为必要的基础. 事实上，流形上的微积分理论及几何理论等已成为近代数学中的重要内容. 本章主要介绍流形上微积分中最基本的概念，包括流形、微分结构、切空间、余切空间，以及子流形等. 而后从张量的角度给出外微分与积分等概念，并介绍张量丛、矢量丛、切丛、余切丛及它们之间的关系.

§1　基本概念

在本章中，用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数直线，$\boldsymbol{N}$ 表示自然数集，$\boldsymbol{R}^m$ 表示 m 维欧氏空间，$m\in \boldsymbol{N}$.

定义 1.1　设 M 为 T_2 型拓扑空间. 若对任一元 $p\in M$，存在 p 的开邻域 V_p，拓扑同胚于 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开集，则称 M 为 m 维拓扑流形，简称 m 维流形. 记同胚映射为

$$\varphi\equiv\varphi_{V_p}:V_p\to\varphi(V_p),$$

并称 (V_p,φ_{V_p}) 为 M 的一个坐标卡，简记为 (V,φ_V). 于是，对于流形 M，存在一个坐标卡集 $\{(V,\varphi_V)\}$，其中 $\{V\}$ 是 M 的一个开覆盖.

对于取定的一个坐标卡 (V,φ_V)，由于 φ 为同胚，故对每个 $q\in V$，仅有一个元 $\varphi_V(q)$ 与之对应. 我们可以把 $\varphi_V(q)\in\boldsymbol{R}^m$ 视为 q 的坐标，令

$$u_j=(\varphi_V(q))_j,\quad j=1,\cdots,m,$$

称 $(u_1,\cdots,u_m)$ 为点 $q\in V$ 的局部坐标.

设(U,φ_U)与(V,φ_V)为流形 M 的两个坐标卡. 若

$$U\cap V\neq\varnothing,$$

则 $\varphi_U(U\cap V)$与 $\varphi_V(U\cap V)$都是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的非空开集，且可推知映射

$$F\equiv\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U\cap V)}$$

为开集 $\varphi_U(U\cap V)$到开集 $\varphi_V(U\cap V)$之间的同胚，其逆映射

$$G\equiv\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U\cap V)}.$$

于是对同时在两个不同的坐标卡中的元 $p\in M$，即 $p\in U\cap V$，若它在坐标卡(U,φ_U)与在另一个坐标卡(V,φ_V)中的坐标分别为$(x_1,\cdots,x_m)$与$(y_1,\cdots,y_m)$，则

$$y_j=f_j(x_1,\cdots,x_m)=(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(x_1,\cdots,x_m))_j,$$
$$j=1,\cdots,m.$$

同样，

$$x_j=g_j(y_1,\cdots,y_m)=(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}(y_1,\cdots,y_m))_j,$$
$$j=1,\cdots,m.$$

其中 $f_j(x_1,\cdots,x_m)$与 $g_j(y_1,\cdots,y_m)$称为坐标变换函数.

定义 1.2 设 M 为 m 维流形，(U,φ_U)和(V,φ_V)为 M 的两个坐标卡，我们称它们是 C^r 相容的，若 $U\cap V=\varnothing$，或若 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，坐标变换函数 $f_j(x_1,\cdots,x_m)$与 $g_j(y_1,\cdots,y_m)$都是 C^r 函数，亦即对于满足

$$f_j(g_1(y_1,\cdots,y_m),\cdots,g_m(y_1,\cdots,y_m))=y_j,\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$
$$g_l(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m))=x_l,\quad 1\leqslant l\leqslant m$$

的坐标变换函数 $f_j,g_l\in C_R(\boldsymbol{R}^m)$都是 r 次连续可导的，$r\in N$.

定义 1.3 设 M 为 m 维流形，给定 M 上的一个开集族$\{U\}$，相应地，存在一个坐标卡集 $\mathscr{A}=\{(U,\varphi_U)\}$. 称 $\mathscr{A}$ 为 M 的一个 C^r 微分结构，若

(1) $\{U\}$是 M 的一个开覆盖，

(2) $\mathscr{A}$ 中的任一对坐标卡是 C^r 相容的，

(3) $\mathscr{A}$ 为极大的，亦即对 M 的任一坐标卡(W,φ_W)，若它与

$\mathscr{A}$ 中每一个坐标卡都是 C^r 相容，则 $(W,\varphi_W)\in\mathscr{A}$.

若 M 上给定了一个 C^r 微分结构，则称 M 为 C^r 微分流形，并称该 C^r 微分结构中的坐标卡为 M 的容许坐标卡. 称具有 C^∞ 微分结构的流形为光滑流形.

本章主要讨论微分流形 M 为实光滑流形的情形.

例 1.1 $M=\boldsymbol{R}^m$.

取 $U=M$，φ_U 为恒同映射，则 $\mathscr{A}=\{U,\varphi_U\}$ 确定了 $\boldsymbol{R}^m$ 的光滑流形结构，称为 $\boldsymbol{R}^m$ 的自然微分结构. 今后若无特别声明，我们就认为 $\boldsymbol{R}^m$ 上取自然微分结构.

例 1.2 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一维"单位球面"

$$S^1=\{(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2: x_1^2+x_2^2=1\}.$$

取 $\mathscr{A}=\{(U_j,\varphi_{U_j}): j=1,2,3,4\}$ 为

$$U_1=\{x\in S^1: x_2>0\},\quad \varphi_{U_1}=x_1,$$

$$U_2=\{x\in S^1: x_2<0\},\quad \varphi_{U_2}=x_1,$$

$$U_3=\{x\in S^1: x_1>0\},\quad \varphi_{U_3}=x_2,$$

$$U_4=\{x\in S^1: x_1<0\},\quad \varphi_{U_4}=x_2.$$

则不难验证 S^1 为光滑流形.

例 1.3 设 M 为 C^r 微分流形，V 为 M 的开集. 若 $\mathscr{A}=\{(U,\varphi_U)\}$ 为 M 的 C^r 微分结构. 令

$$\mathscr{B}=\{(U\cap V,\varphi_U): U\cap V\neq\varnothing,(U,\varphi_U)\in\mathscr{A}\},$$

则 $\mathscr{B}$ 为 V 的 C^r 微分结构，从而 V 也是一个 C^r 微分流形.

例 1.4 设 $M=\boldsymbol{R}$，令

$$\mathscr{A}_1=\{(\boldsymbol{R},I): I\text{ 为 }\boldsymbol{R}\text{ 到 }\boldsymbol{R}\text{ 的恒同映射 }I(x)=x\},$$

$$\mathscr{A}_2=\{(\boldsymbol{R},\varphi): \varphi\text{ 为 }\boldsymbol{R}\text{ 到 }\boldsymbol{R}\text{ 的映射 }\varphi(x)=x^3\}.$$

则 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 都是 $\boldsymbol{R}$ 上的 C^∞ 微分结构. 这样，我们给出了 $\boldsymbol{R}$ 上两个不同的微分结构，易见，它们不可能是拓扑等价的.

例 1.5 $M=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: (x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$ 为双纽线. 作为 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间它不是一维流形. 在 §3 中我们将返回到这个例

子，并且说明它为什么不是一个一维流形.

我们常将一个具有 C^r 微分结构 $\mathscr{A}$ 的 C^r 微分流形 M 记为 $(M,\mathscr{A})$.

设 $(M,\mathscr{A})$ 为 m 维光滑流形，$f: M\to \boldsymbol{R}$ 为定义在 M 上的实值函数. 我们将用下面的方法，由 M 上的拓扑性质及其微分结构去讨论 f 的分析性质，例如连续性、可微性、光滑性等.

定义 1.4 对于 $p\in M$，设 $(U,\varphi_U)\in\mathscr{A}$ 为含点 p 的一个坐标卡，由定义可知 $f\circ\varphi_U^{-1}:\varphi_U(U)\to\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 $\varphi_U(U)$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的实值函数. 若 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点 $\varphi_U(p)\in\boldsymbol{R}^m$ 是 C^∞ 的，则称 f 在 $p\in M$ 为光滑函数. 若在每个 $p\in M$，f 为光滑的，则称 f 在流形 M 上光滑.

$(M,\mathscr{A})$ 上光滑函数的全体记为 $C_{\boldsymbol{R}}^\infty(M)$ 或简记为 $C^\infty(M)$.

定义 1.5 设 $(M,\mathscr{A})$ 与 $(N,\mathscr{B})$ 分别为 m 维与 n 维光滑流形，$f: M\to N$ 为连续映射. 若对 $p\in M$，存在 $(U,\varphi_U)\in\mathscr{A}$ 为 p 的坐标卡，也存在 $(V,\psi_V)\in\mathscr{B}$ 为 $f(p)$ 的坐标卡，使映射 $\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}:\varphi_U(U)\to\psi_V(V)$ 在 $\varphi_U(p)$ 为 C^∞ 的，则称 f 在 p 点为 C^∞ 映射. 若在 M 的每一点都是 C^∞ 的，则称 f 在 M 上为 C^∞ 映射. 显然 C^∞ 映射与坐标卡的选取无关.

若 $f: M\to N$ 为同胚映射，且 f 与 f^{-1} 都是光滑映射，则称 f 为 M 到 N 的可微同胚. 若两个流形之间存在可微同胚映射，则称 M 与 N 为可微同胚流形.

定义 1.6 设 M 为 m 维光滑流形，$f:(a,b)\to M$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的区间 (a,b) 到 M 的映射，若 f 为光滑映射，则称 f 为 M 上的一条参数曲线.

§2 余切空间，切空间

设 $(M,\mathscr{A})$ 为 m 维光滑流形，我们按如下步骤定义它的余切空间与切空间.

1. 函数空间 C_p^∞

记定义在点 $p\in M$ 的邻域上的 C^∞函数 $f: U\to \mathbf{R}$ 的全体所成的集为 C_p^∞. 在 C_p^∞ 中,定义元之间的代数运算如下.

若 $f,g\in C_p^\infty$,设 f 的定义域 $\mathscr{D}_f=U$,g 的定义域 $\mathscr{D}_g=V$. 在 $U\cap V$上定义运算 $f+g,\alpha f,fg$ 分别为:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),\ \alpha\in \mathbf{R}$,

$(fg)(x)=f(x)g(x)$,

则 $f+g,\alpha f,fg\in C_p^\infty$,使 C_p^∞ 成为一个函数空间.

在 C_p^∞ 中定义元的等价关系: $f,g\in C_p^\infty$,称 f 与 g 等价,记为 $f\sim g$,若存在 p 的开邻域 H,使 $f|_H=g|_H$. 记$[f]$为 f 在 C_p^∞ 中关于$\sim$的等价类

$$[f]=\{g\in C_p^\infty: g\sim f\}.$$

称$[f]$为流形 M 在点 p 的 C^∞函数芽.

2. 商空间 $\mathscr{F}_p=C_p^\infty/\sim$

设 C_p^∞ 关于等价关系$\sim$的等价类的全体为

$$\mathscr{F}_p\{[f]: f\in C_p^\infty\},$$

则 $\mathscr{F}_p$ 为商集 $C_p^\infty/\sim$.

在 $\mathscr{F}_p$ 中定义元的加法与数乘:

$$[f]+[g]=[f+g],\quad \alpha[f]=[\alpha f],\quad \alpha\in \mathbf{R}.$$

则 $\mathscr{F}_p$ 成为一个线性空间.

3. 参数曲线集 Γ_p

定义 M 上过 p 点的参数曲线集合

$$\Gamma_p=\{\gamma:\ 存在\ \delta>0,使\ \gamma:(-\delta,\delta)\to M\ 是\ C^\infty\ 映射,且\ \gamma(0)=p\},$$

其中的元 γ 称为 M 上过 p 点的参数曲线.

4. $\mathscr{F}_p$ 的线性子空间 $\mathscr{H}_p$

对于 $\gamma\in\Gamma_p$ 与$[f]\in\mathscr{F}_p$,定义 γ 与$[f]$的配合

$$《\gamma,[f]》= \left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \quad -\delta<t<\delta.$$

显然，这个配合与$[f]$中 f 的选取无关. 令

$$\mathscr{H}_p = \{[f]\in\mathscr{F}_p : 《\gamma,[f]》=0 \text{ 对每个 } \gamma\in\Gamma_p\}.$$

由于对每个 $\gamma\in\Gamma_p$，$[f]$和$[g]\in\mathscr{F}_p$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$，有

$$《\gamma,[f]+[g]》=《\gamma,[f]》+《\gamma,[g]》,$$

$$《\gamma,\alpha[f]》=\alpha《\gamma,[f]》,$$

故 $\mathscr{H}_p$ 成为 $\mathscr{F}_p$ 的线性子空间.

5. 余切空间 $T_p^*=\mathscr{F}_p/\mathscr{H}_p$

以线性子空间 $\mathscr{H}_p$ 作商空间 $\mathscr{F}_p/\mathscr{H}_p$，记为 T_p^*，称 T_p^* 为流形 M 在 p 点的余切空间. 函数芽$[f]$的 $\mathscr{H}_p$ 等价类记作$[f]^\sim$，也记作$(\mathrm{d}f)_p$，称$(\mathrm{d}f)_p$ 为 M 在 p 点的余切矢量.

6. 切空间 T_p

定义流形 M 在 p 点的切空间为余切空间 T_p^* 的对偶空间，亦即

$$T_p=\{g : g \text{ 为 } T_p^* \text{ 上的线性泛函}\}.$$

切空间中的元称为 p 点的切矢量.

为了理解余切空间与切空间的实质，我们研究它们的一些性质. 首先讨论余切空间 T_p^*.

定理 2.1 设$[f]\in\mathscr{F}_p$，对每个 $f\in[f]$与每个含 p 的容许坐标卡(U,φ_U)，令

$$F(x_1,\cdots,x_m)=f\circ\varphi_U^{-1}(x_1,\cdots,x_m),$$

则$[f]\in\mathscr{H}_p$，当且仅当

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_{\varphi_U(p)}=0, \quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

证 对于 $\gamma\in\Gamma_p$，令其坐标表示为

$$(\varphi_U\circ\gamma(t))_i=x_i(t), \quad 1\leqslant i\leqslant m, -\delta<t<\delta.$$

则不难写出

$$\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle = \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi_U(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}.$$

故欲使$\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle=0$对每个$\gamma\in\Gamma_p$成立，当且仅当

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}\bigg|_{\varphi_U(p)} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

由此定理可知，$\mathscr{H}_p$是$\mathscr{F}_p$的线性子空间，其中的元是在p点关于局部坐标的偏导数全为0的C^∞函数芽.

定理 2.2 设$f_1,\cdots,f_s\in C_p^\infty$，$p\in M$. 若$F(y_1,\cdots,y_s)$为$\boldsymbol{R}^s$中的点$(f_1(p),\cdots,f_s(p))$的邻域$W$内的光滑函数，则$f\equiv F(f_1,\cdots,f_s)\in C_p^\infty$，且有

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial f_k}\bigg|_{(f_1(p),\cdots,f_s(p))} (\mathrm{d}f_k)_p.$$

证 设f_k的定义域为$U_k\subset M$，且$p\in U_k$. 则f在$\bigcap\limits_{k=1}^{s} U_k$中有定义. 取$q\in\bigcap\limits_{k=1}^{s} U_k$，据$f$的定义，有

$$f(q) = F(f_1(q),\cdots,f_s(q)).$$

如此f为光滑函数的复合，故$f\in C_p^\infty$. 对于任一个$\gamma\in\Gamma_p$，经计算给出

$$\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \gamma, \sum_{k=1}^{s} a_k [f_k] \right\rangle\!\!\right\rangle,$$

其中$a_k = \dfrac{\partial F}{\partial f_k}\bigg|_{(f_1(p),\cdots,f_s(p))}$. 这表明

$$[f] - \sum_{k=1}^{s} a_k [f_k] \in \mathscr{H}_p.$$

亦即$(\mathrm{d}f)_p = \sum\limits_{k=1}^{s} a_k (\mathrm{d}f_k)_p$. 定理得证.

定理 2.3 对于$f,g\in C_p^\infty$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$，下列公式成立

$$(\mathrm{d}(f+g))_p = (\mathrm{d}f)_p + (\mathrm{d}g)_p,$$
$$(\mathrm{d}(\alpha f))_p = \alpha(\mathrm{d}f)_p,$$

$$(\mathrm{d}(fg))_p = f(p)(\mathrm{d}g)_p + g(p)(\mathrm{d}f)_p.$$

定理 2.4 T_p^* 是 m 维线性空间.

证 T_p^* 是线性空间,因为它的元是 $\mathscr{F}_p$ 中的 $\mathscr{H}_p$ 等价类 $[f]^\sim$,而由定理 2.3 得

$$[f+g]^\sim = [f]^\sim + [g]^\sim,$$
$$[\alpha f]^\sim = \alpha[f]^\sim, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}.$$

为证 $\dim T_p^* = m$,对于 $p\in M$,取一个包含 p 的容许坐标卡 (U,φ_U). 对应于 p 的在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的坐标系为 $\{x_1,\cdots,x_m\}$. 于是,任一点 $q\in U$ 的局部坐标为

$$u_i(q) = (\varphi_U(q))_i = x_i \circ \varphi_U(q), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

由 $u_i \in C_p^\infty$ 知 $(\mathrm{d}u_i)_p \in T_p^*$. 下面我们证明 $\{(\mathrm{d}u_i)_p\}_{i=1}^m$ 为 T_p^* 的一个基.

事实上,对任一个元 $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*$, $f\circ\varphi_U^{-1}$ 为定义在 $\boldsymbol{R}^m$ 中某个开集上的光滑函数. 令

$$F(x_1,\cdots,x_m) = f\circ\varphi_U^{-1}(x_1,\cdots,x_m),$$

则 $f = F(u_1,\cdots,u_m)$. 据定理 2.2,我们有

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{(u_1(p),\cdots,u_m(p))} (\mathrm{d}u_i)_p, \tag{2.1}$$

故 $(\mathrm{d}f)_p$ 可表为 $(\mathrm{d}u_i)_p$ 的线性组合.

再证 $(\mathrm{d}u_i)_p$ 为线性无关的, $1\leqslant i\leqslant m$. 设有一组实数 a_i, $1\leqslant i\leqslant m$,使得

$$\sum_{i=1}^m a_i(\mathrm{d}u_i)_p = 0.$$

从而

$$\sum_{i=1}^m a_i[u_i] \in \mathscr{H}_p.$$

于是对每个 $\gamma\in\Gamma_p$,有

$$0 = \left\langle\!\left\langle \gamma, \sum_{i=1}^m a_i[u_i] \right\rangle\!\right\rangle = \sum_{i=1}^m a_i \left.\frac{\mathrm{d}(u_i\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{2.2}$$

取一组 $\gamma_k \in \Gamma_p, 1 \leqslant k \leqslant m$，满足

$$u_i \circ \gamma_k(t) = u_i(p) + \delta^i_k t,$$

其中 δ^i_k 为 Kronecker 符号

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

显然，这样的 γ_k 存在，并且有

$$《\gamma_k, [u_i]》 = \left.\frac{\mathrm{d}(u_i \circ \gamma_k)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \delta^i_k.$$

在(2.2)式中令 $\gamma = \gamma_k$，便得出 $a_k = 0, 1 \leqslant k \leqslant m$. 从而知 $\{(\mathrm{d}u_i)_p\}_{i=1}^m$ 线性无关. 这样 T_p^* 具有含 m 个线性无关元的基，故 $\dim T_p^* = m$. 定理得证.

有限维空间与其对偶空间具有相同的维数，故由定理 2.4 可知，m 维流形 M 的余切空间 T_p^*、切空间 T_p 都与 M 具有相同的维数. 我们称定理 2.4 中所确定的 T_p^* 的基底 $\{(\mathrm{d}u_i)_p\}_{i=1}^m$ 为 T_p^* 关于局部坐标系 $\{u_i\}$ 的自然基底.

作为 T_p^* 的对偶空间，T_p 中的元究竟是什么呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 2.5 在 Γ_p 上可定义等价关系～：对于 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$，$\gamma_1 \sim \gamma_2$ 是指对于任意的 $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*$，下面等式成立

$$《\gamma_1, (\mathrm{d}f)_p》 = 《\gamma_2, (\mathrm{d}f)_p》. \tag{2.3}$$

记 γ 的等价类为 $[\gamma]$，则 $T_p = \{[\gamma] : \gamma \in \Gamma_p\}$.

证 由上述(2.3)式中关于～的定义知，对任意 $\gamma' \in [\gamma]$，都有

$$《\gamma', (\mathrm{d}f)_p》 = 《\gamma, (\mathrm{d}f)_p》, \quad \gamma \in [\gamma],$$

其中 $《\gamma, (\mathrm{d}f)_p》 = 《\gamma, [f]^{\sim}》 = 《\gamma, [f]》$ 不依赖 $\mathscr{F}_p$ 中 $\mathscr{H}_p$ 等价类的元 $[f]$ 的选择. 从而 Γ_p 中的关系～有意义并且也是一个等价关系. 于是我们可以对 T_p^* 与 T_p 的元定义一种对偶积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$：

$$\langle [\gamma], (\mathrm{d}f)_p \rangle = 《\gamma, (\mathrm{d}f)_p》. \tag{2.4}$$

现在证明，所有的 $[\gamma]$，$\gamma \in \Gamma_p$，组成 T_p^* 的对偶空间. 为此，我

们证明对每个$[\gamma]$，$[\gamma]$对$(\mathrm{d}f)_p$的作用，亦即对偶积$\langle[\gamma],(\mathrm{d}f)_p\rangle$是$T_p^*$到$\boldsymbol{R}$的一个线性函数. 而当$[\gamma]$跑遍所有的等价类时，(2.4)表示$T_p^*$上的线性函数的全体，从而组成$T_p^*$的对偶空间$T_p$. 我们利用局部坐标系来完成这个证明.

设$\{u_i\}$为p点的局部坐标系. 在局部坐标u_i之下，设$\gamma\in\Gamma_p$由函数$u_i=u_i(t)$给出，$1\leqslant i\leqslant m$. 于是，

$$\langle[\gamma],(\mathrm{d}f)_p\rangle = \langle\!\langle\gamma,(\mathrm{d}f)_p\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i, \qquad (2.5)$$

其中 $\alpha_i = \frac{\partial}{\partial u_i}(f\circ\varphi_U^{-1})\Big|_{\varphi_U(p)}$，$\xi_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$. 这里系数$\alpha_i$恰好是$(\mathrm{d}f)_p$关于自然基底$(\mathrm{d}u_i)_p$的坐标分量. 于是，$\langle[\gamma],(\mathrm{d}f)_p\rangle$成为由分量$\xi_i$完全确定的$T_p^*$上的线性函数. 另一方面，取$\gamma$为$u_i(t)=u_i(p)+\xi_i t$，可见$\xi_i$能取任意的数值，故(2.4)式表示$\gamma\in\Gamma_p$，而$[\gamma]$跑遍所有等价类时，就给出了$T_p^*$的全体线性函数. 这就是要证明的.

现在不难明白，切空间T_p中的元$[\gamma]$的几何意义是：在p点有相同切矢量的所有参数曲线的集合. 通常就称T_p中的元$[\gamma]$为切矢量.

(2.4)式所确定的函数，采用附录中的术语与记号，它是$T_p\times T_p^*$到$\boldsymbol{R}$的一个二重线性函数.

定理 2.6 设$\{(\mathrm{d}u_i)_p\}_{i=1}^m$为$T_p^*$的自然基底. 在$\Gamma_p$中选取参数曲线$\gamma_k(1\leqslant k\leqslant m)$，满足

$$u_i\circ\gamma_k(t) = u_i(p) + \delta_k^i t, \quad 1\leqslant i\leqslant m, \qquad (2.6)$$

则$\{[\gamma_k]\}_{k=1}^m$成为T_p的基底，称为对偶基底. 从而，

$$\dim T_p = m.$$

T_p的对偶基底也称为T_p的自然基底.

注意到由(2.6)式给出的γ_k满足$\langle[\gamma_k],(\mathrm{d}f_i)_p\rangle=\delta_k^i$，便不难得出定理的结论.

由于

$$\langle[\gamma_k],(\mathrm{d}f)_p\rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\right)_p = \frac{\partial(f\circ\varphi_U^{-1})}{\partial u_i}\bigg|_{\varphi_U(p)},$$

故$[\gamma_k]$对函数芽$[f]$而言,是偏导数算子 $\frac{\partial}{\partial u_k}$,它满足

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial u_k}\bigg|_p,(\mathrm{d}f)_p\right\rangle \in T_p^*$$

为 f 在点 p 的导数.若$(\mathrm{d}f)_p=0$,则称 p 为 f 的临界点. M 上光滑函数临界点的研究是微分流形的重要课题之一.

定义 2.1 T_p 中的元$[\gamma]$也记作 X_p,$X_p=[\gamma]$.对于 $f\in C_p^\infty$,称

$$X_pf = \langle X_p,(\mathrm{d}f)_p\rangle$$

为 f 沿切矢量 X_p 的方向导数.

定理 2.7 方向导数有下列性质:设 $X_p\in T_p$,若 $f,g\in C_p^\infty$,α,$\beta\in\boldsymbol{R}$,则

(1) $X_p(\alpha f+\beta g)=\alpha X_pf+\beta X_pg$;

(2) $X_p(fg)=f(p)X_pg+g(p)X_pf$.

这个定理表明,若把切矢量 X_p 看作算子,则它是 C_p^∞ 上的线性泛函.

定义 2.2 若对流形 M 的任一点 p,指定 M 在 p 点的一个切矢量 X_p,我们称 $X=\{X_p:p\in M\}$为流形 M 的切矢量场.若对 $f\in C^\infty\equiv C_R^\infty(M)$,令$(Xf)(p)=X_pf$,这里 $X_pf=\langle X_p,(\mathrm{d}f)_p\rangle$,则记号 $Xf: M\to\boldsymbol{R}$ 成为流形 M 到 $\boldsymbol{R}$ 的实函数.若 X 为光滑流形 M 上的一个切矢量场,且对任意 $f\in C^\infty(M)$,有 $Xf\in C^\infty(M)$,则称 X 为流形 M 上的光滑切矢量场.这样,光滑切矢量场是 $C^\infty(M)$到 $C^\infty(M)$上的一个线性映射.

定理 2.8 流形 M 上的切矢量场 X 是光滑的,当且仅当对每个 $p\in M$,存在 p 的局部坐标系(U,u_i),使

$$X|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i\frac{\partial}{\partial u_i},$$

其中 ξ_i 是 U 上的光滑函数，$1 \leqslant i \leqslant m$.

证 充分性显然. 必要性由 $X|_U$ 为开子流形 U 上的光滑矢量场得到.

定义 2.3 设 X, Y 为 M 上的两个光滑切矢量场，称$[X,Y]=XY-YX$ 为它们的 Poisson 括号. 易见，$[X,Y]$为 $C^\infty(M)$到自身的算子，也是 M 上的光滑矢量场.

定理 2.9 Poisson 括号有如下性质：

(1) $[X,Y](f+g)=[X,Y]f+[X,Y]g$,

(2) $[X,Y](fg)=f\cdot[X,Y]g+g\cdot[X,Y]f$,

(3) $[X,Y]=-[Y,X]$,

$[X+Y,Z]=[X,Z]=[Y,Z]$,

(4) $[fX,gY]=f\cdot(Xg)Y-g\cdot(Yf)X+f\cdot g[X,Y]$,

(5) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

定义 2.4 设 X 是流形 M 上的光滑切矢量场，若在 $p\in M$，$X_p=0$，则称点 p 是切矢量场 X 的一个奇点.

切矢量场在奇点附近的性质很复杂，光滑切矢量场在非奇点附近的性状却有如下较简单的性质.

定理 2.10 设 X 为 M 的光滑切矢量场. 若在 $p\in M, X_p\neq 0$，则存在 p 点的一个局部坐标系(W,w_i)，使得

$$X|_w = \frac{\partial}{\partial w_1}.$$

证 据定理 2.8，存在 p 点的局部坐标系(U,u_i)，使

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{2.7}$$

不失一般性，可设 $u_i(p)=0$，且 ξ_i 为 U 上的光滑函数. 因为 $X_p\neq 0$，故 $\xi_i|_p$ 不全为零. 我们设 $\xi_1(p)\neq 0$. 于是，存在 p 的充分小的邻域，例如就是 U，使得 $\xi_1|_U\neq 0$.

由(2.7)式知，ξ_i 应为 $u_1,\cdots,u_m$ 的光滑函数，于是我们可求解下列一个常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}u_1}=\frac{\xi_\alpha(u_1,\cdots,u_m)}{\xi_1(u_1,\cdots,u_m)},\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m. \tag{2.8}$$

对于一组给定的初值$(v_2,\cdots,v_m)$,存在$\delta>0$,使

$$G\equiv\{(u_1,\cdots,u_m):|u_i|<\delta\}\subset U,$$

而方程组(2.8)有唯一的一组解

$$u_\alpha=\varphi_\alpha(u_1;v_2,\cdots,v_m),\quad |u_1|<\delta,2\leqslant\alpha\leqslant m,$$

且满足初始条件$\varphi_\alpha(0;v_2,\cdots,v_m)=v_\alpha$. 作变量代换

$$\begin{cases}u_1=v_1,\\ u_\alpha=\varphi_\alpha(v_1;v_2,\cdots,v_m),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m.\end{cases} \tag{2.9}$$

不难计算,(2.9)式的 Jacobi 行列式为 1,从而存在p的邻域$W\subset G\subset U$,使得

$$\begin{aligned}X|_W&=\sum_{i=1}^m\xi_i\frac{\partial}{\partial u_i}=\xi_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\sum_{\alpha=2}^m\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\\&=\xi_1\frac{\partial}{\partial v_1}+\xi_1\sum_{\alpha=2}^m\frac{\partial u_\alpha}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\\&=\xi_1\sum_{\alpha=1}^m\frac{\partial u_\alpha}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}=\xi_1\frac{\partial}{\partial v_1}.\end{aligned}$$

最后,令

$$\begin{cases}w_1=\displaystyle\int_0^{v_1}\frac{dv_1}{\xi_1},\\ w_\alpha=v_\alpha,\qquad 2\leqslant\alpha\leqslant m,\end{cases}$$

则得$\xi_1\dfrac{\partial}{\partial v_1}=\dfrac{\partial}{\partial w_1}$,定理得证.

研究切矢量场的各种性质,与微分方程理论有较密切的关系. 例如刻画流形M上的h维光滑分布L^h充要条件的 Frobenius 定理等,它们在微分动力系统等分支中有广泛的应用. 由于内容较专门,超出本课程范围,故不作介绍了.

本节末我们给出一个重要的定义,它的意义要到§5再仔细介绍.

定义 2.5 设M,N分别为m维与n维光滑流形. $F:M\to N$

为光滑映射，$p\in M, q=F(p)\in N$. 定义映射 $F^*: T_q^* \to T_p^*$ 如下：

$$F^*((\mathrm{d}f)_q) = \mathrm{d}(f\circ F)_p, \quad (\mathrm{d}f)_q \in T_q^*,$$

称 F^* 为 F 的微分. 进而，设 F^* 的共轭映射为 $F_*: T_p \to T_q$，它满足

$$\langle F_* X, a\rangle = \langle X, F^* a\rangle,$$

其中 $X\in T_p, a\in T_q^*$. 称 F_* 为由 F 诱导的切映射.

设 M 在 p 点的局部坐标卡是 (U,φ)，对应的局部坐标为 $(x_1, \cdots, x_m)$. 我们用 (V,ψ) 及 $(y_1,\cdots,y_n)$ 分别表示 N 在 q 点的局部坐标卡与局部坐标，且 $F(U)\subset V$. 又设在上述局部坐标下，有

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p, \quad F_* X = \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_q, \tag{2.10}$$

则可推知，$b_k = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{jk} a_j$，其中

$$c_{jk} = \left.\frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})_k}{\partial x_j}\right|_{F(p)} = \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|_{F(p)}. \tag{2.11}$$

§3 子 流 形

在讨论子流形前，我们先回忆一下第一章 §7 中的反函数定理. 利用这个定理，取局部坐标系，不难得到流形情形下的关于切映射的反函数存在性定理.

定理 3.1 设 M 与 N 为两个 n 维光滑流形，$f: M\to N$ 为光滑映射. 若在 $p\in M$，由 f 诱导的切映射 $f_*: T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$ 为同构映射，则存在 p 在 M 中的邻域 U，使 $V=f(U)$ 为 $q=f(p)$ 在 N 中的邻域，且 $f|_U: U\to V$ 为可微同胚.

证 因 $f: M\to N$ 是光滑映射，取 p 在 M 中的局部坐标系 (V_0, ψ_{V_0})，满足 $f(U_0)\subset V_0$，且映射 $\bar{f}\equiv\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为 $\varphi(U_0)\to\psi(V_0)$ 的光滑映射，由于 f_* 是同构映射，据(2.11)式，显然有

$$\left.\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_j}\right|_{\varphi(p)} \neq 0.$$

再由反函数存在定理(在第一章定理 7.4 中,取 $X=\boldsymbol{R}^n$)知,存在 $\varphi(p)$ 与 $\psi(q)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的邻域 $\widetilde{U}\subset\varphi(U_0)$ 与 $\widetilde{V}\subset\psi(V_0)$,使映射 $f|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to\widetilde{V}$ 为可微同胚.

令 $U=\varphi^{-1}(\widetilde{U}),V=\psi^{-1}(\widetilde{V})$,则 U 与 V 分别为 p 在 M 与 q 在 N 中的邻域,且 $f=\psi^{-1}\circ\bar{f}\circ\varphi:U\to V$ 是可微同胚. 定理得证.

利用定理 3.1 可以证明不同维数的光滑流形之间的切映射 f_* 与 f 的单一性的关系.

定义 3.1 设 M 为 m 维光滑流形,N 为 n 维光滑流形. 若 $f:M\to N$ 为光滑映射,其切映射 f_* 在 $p\in M$ 是单一映射,则称 f_* 在该点为非退化的.

定理 3.2 设 M,N 分别为 m 维与 n 维的光滑流形,$m<n$. $f:M\to N$ 为光滑映射. 若其切映射 f_* 在 $p\in M$ 是非退化的,则分别存在 p 点与 q 点的局部坐标系 (U,u_i) 与 (V,v_j),使

$$f(U)\subset V,$$

且映射 $f|_U$ 可用局部坐标系表示:对任意 $x\in U$,有

$$\begin{cases}v_j(f(x))=u_j(x), & 1\leqslant j\leqslant m,\\ v_j(f(x))=0, & m+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases}$$

证 取 $p\in M$ 的局部坐标系 (U,u_i),相应地,取 $q=f(p)\in N$ 的局部坐标系 (V,v_j). 于是

$$v_j=f_j(u_1,\cdots,u_m),\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

不失一般性,设 $u_i(p)=0,v_j(q)=0$. 同时,由假设知变换矩阵

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_i}\right)_{i=1,\cdots,m}$$

非退化,因此

$$\left|\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_i}\right)\right|_{i=1,\cdots,m}\neq 0.$$

作 $n-m$ 维方体

$$I^{n-m}=\{(w_{m+1},\cdots,w_n):|w_l|<\delta,m+1\leqslant l\leqslant n,\delta>0\}.$$

适当选取 U,δ,作映射

$$\bar{f} = (\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_n) : U \times I_{n-m} \to V,$$

使满足

$$\bar{f}_i(u_1, \cdots, u_m, w_{m+1}, \cdots, w_n) = \begin{cases} f_i(u_1, \cdots, u_m), & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ w_i + f_i(u_1, \cdots, u_m), & m+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

则$\bar{f}$在$(u_i, w_j) = (0, \cdots, 0) \in \boldsymbol{R}^{m+n}$的 Jacobi 矩阵是非退化的. 适当选取 U 与 δ,据定理 3.2,映射$\bar{f}$为 $U \times I_{n-m}$到 V 上的微分同胚. 这样,只要取$(t_l) = (u_i, w_j)$为 q 的邻域 V 上的局部坐标系,也就是

$$t_l = \begin{cases} u_i, & 1 \leqslant l \leqslant m, \\ w_j, & m+1 \leqslant l \leqslant n. \end{cases}$$

不难看出,$f|_U = \bar{f}|_{U \times \{0, \cdots, 0\}}$. 这正表明,$f$ 在新的坐标下,其后面的 $n-m$ 个坐标为 0,这就是要证明的.

此定理告诉我们,若切映射 f_* 在点 p 是单一的,则映射 f 在 p 点附近也是单一的.

定义 3.2 设 M, N 为两个光滑流形, $\dim M = m, \dim N = n$. 若存在光滑映射 $\varphi: M \to N$,满足

(1) φ是单一的;

(2) 在任一点 $p \in M$,切映射 $\varphi_* : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$都是非退化的.

则称(φ, M)为 N 的光滑子流形,或称为嵌入子流形,φ 称为嵌入映射. 若映射 φ 只满足条件(2),则由定理 3.2 知,φ 仅是局部单一的,此时称它为浸入映射,并称(φ, M)为浸入子流形.

例 3.1 开子流形.

设 N 为光滑流形,$G \subset N$ 为 N 的开子集,取 N 的 C^∞ 微分结构 $\mathscr{B}$ 在 G 上的限制

$$\tilde{\mathscr{B}} \equiv \mathscr{B}|_G = \{(U \cap G, \psi|_{U \cap G}) : (U, \psi) \in \mathscr{B}\},$$

它使 G 成为与 N 维数相同的光滑流形,相应于它的嵌入映射为恒同映射 $\varphi = I: G \to N, I(x) = x$. 故 G 称为 N 的开子流形.

例 3.2 闭子流形.

设(φ,M)为 n 维光滑流形 N 的一个 m 维光滑子流形,满足

(1) $\varphi(M)$为 N 的闭子集;

(2) 对每一个 $q\in\varphi(M)$,存在 N 上的局部坐标系(V,v_i),使 $\varphi(M)\cap V$ 由方程 $v_{m+1}=0,\cdots,v_n=0$ 确定.

此时称(φ,M)为 N 的闭子流形. 例如 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的单位球面 S^n 就是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的一个 n 维闭子流形.

例 3.3 取 $M=\boldsymbol{R},N=\boldsymbol{R}^2$,映射 $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ 为

$$F(t)=\left(2\cos\left(2\arctan t+\frac{\pi}{2}\right),\sin2\left(2\arctan t+\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

则$(F,\boldsymbol{R})$为 $\boldsymbol{R}^2$ 的嵌入子流形.

事实上,令 $u=2\arctan t+\dfrac{\pi}{2}$,则 $F(u)=(2\cos u,\sin2u)$. 注意到 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arctan t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 则得 F 是双方单值的,从而$(F,\boldsymbol{R})$是 $\boldsymbol{R}^2$ 的嵌入子流形.

例 3.4 取 $M=\boldsymbol{R},N=\boldsymbol{R}^2$,映射 $G:M\to N$ 是

$$G(t)=\left(2\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\sin2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

则$(G,\boldsymbol{R})$为 $\boldsymbol{R}^2$ 的浸入子流形,但非嵌入的.

事实上,令

$$\begin{cases}x(t)=2\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right),\\ y(t)=\sin2\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

易见 G 不是单一的,但

$$x'^2+y'^2=4\left\{\sin^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\left[2\cos^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]^2\right\},$$

故 $F(t)$非退化,于是$(G,\boldsymbol{R})$是 $\boldsymbol{R}^2$ 的浸入子流形但不是嵌入的.

例 3.5 取 $M=\boldsymbol{R},N=\boldsymbol{R}^2$,映射 $H:M\to N$ 是

$$H(t)=(x(t),y(t))=\left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\frac{t(t^2-1)}{t^4+1}\right),$$

这是双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$的参数方程. 计算后得到

$$(x_t')^2+(y_t')^2\neq 0,$$

从而H是C^∞嵌入. 但不难看出H^{-1}不连续,故H不是同胚映射,当然也就不是嵌入的.

显然,嵌入子流形可以继承原流形的微分结构,但由嵌入映射φ得到的$\varphi(M)$上的拓扑结构却未必与$\varphi(M)$作为N的子空间的拓扑结构相一致,上面的例3.3就是这样的情形. 浸入流形当然更是如此. 为此我们定义性质更好的一类所谓正则子流形.

定义 3.3 设(φ,M)为光滑流形N的子流形. 若$\varphi: M\to\varphi(M)$为同胚映射,则称(φ,M)为N的正则子流形;或称φ是M在N中的正则嵌入.

定理 3.3 设(φ,M)为N的光滑子流形. 则(φ,M)为N的正则子流形,当且仅当(φ,M)是N的一个开子流形的闭子流形.

证 充分性. 只要证明N的任一闭子流形必为正则子流形. 也只需证明在闭子流形的定义中的映射$\varphi: M\to\varphi(M)\cap V$有连续的逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(M)\to M$.

设A是N的开子流形,(φ,M)是A的闭子流形. 不失一般性,就设$A=N$. 对于每个$p\in M, q=\varphi(p)\in\varphi(M)$,取$N$的局部坐标系$(V,v_j)$,使$\varphi(M)\cap V$由方程

$$v_{m+1}=\cdots=v_n=0$$

确定. 给出$p\in M$的局部坐标系(U,u_i),使得$\varphi(U)\subset V$. 作坐标平移后,可设

$$u_i(p)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m,\qquad v_k(q)=0,\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

且设V是N中的开立方体

$$V=\{(v_1,\cdots,v_n): |v_k|<\delta\},\ \delta>0.$$

显然$\varphi(U)\subset\varphi(M)\cap V$.

由假设,(φ,M)是N的光滑子流形,故欲证其为正则子流形,只需证明逆映射$\varphi^{-1}:\varphi(M)\to M$是连续映射. 亦即证明,对任一邻域$U$,存在$\delta_1>0$,使得方体$V_1=\{(v_1,\cdots,v_n): |v_k|<\delta_1\}$与

$\varphi(M)$的交 $\varphi(M)\cap V_1$ 满足

$$\varphi^{-1}(\varphi(M)\cap V_1)\subset U.$$

其实,由 v_j 的选取知道,在 $\varphi(M)\subset V$ 中的局部坐标为

$$v_{m+1}=\cdots=v_n=0. \tag{3.1}$$

因此映射 φ 在 U 上的限制 $\varphi|_U$ 可局部地表示为

$$\begin{cases} v_j=\varphi_j(u_1,\cdots,u_m), & 1\leqslant j\leqslant m, \\ v_k=0, & m+1\leqslant k\leqslant n, \end{cases} \tag{3.2}$$

这样,我们有:

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}\right|_{u_j=0,1\leqslant j\leqslant m}\neq 0.$$

利用 $\boldsymbol{R}^m$ 中的反函数存在定理,存在 $0<\delta_1<\delta$,使(3.2)式中第一组 m 个方程有反函数 $u_i=\psi_i(v_1,\cdots,v_m)$, $1\leqslant i\leqslant m$,其中 $|v_j|<\delta_1$, $1\leqslant j\leqslant m$,从而包含关系式

$$\varphi^{-1}(\varphi(M)\cap V_1)\subset U$$

成立. 故 φ^{-1}连续. 充分性得证.

必要性. 设(φ,M)为 N 的正则子流形,利用定义与定理 3.2,任取 $p\in M$ 及其邻域 U,存在 $q=\varphi(p)$ 在 N 中的邻域 V,使得 $\varphi(U)=\varphi(M)\cap V$, φ 为 U 到 V 的同胚映射. 按照第一章 §7 中秩定理证明的思路可得,存在 p 点的局部坐标系(U_p,u_i)与 q 点的局部坐标系(V_q,v_j),使得 $\varphi(U_p)\subset V_q$,且 $\varphi|_{U_p}$可表示为

$$\varphi(u_1,\cdots,u_m)=(u_1,\cdots,u_m,0,\cdots,0),$$

其中 $U_p\subset U$, $V_q\subset V$. 从而亦有 $\varphi(U_p)=\varphi(M)\subset V_q$,并且 $\varphi(M)\subset V_q$ 也由方程 $v_{m+1}=\cdots=v_n=0$ 确定.

现在我们构造 N 中的一个子流形 W,使得(φ,M)为 W 中的闭子流形.

对于 $q\in\varphi(M)$,对按上一步所得的开邻域 V_q,令

$$W=\bigcup_{q\in\varphi(M)}V_q,$$

易见:

(1) $W \subset N$ 为开子集,且 $\varphi(M) \subset W$;

(2) W 是 N 的开子流形;

(3) $\varphi(M)$为 W 中的闭子集.

我们只证明(3). 为此也只需证明$\overline{\varphi(M)} \cap W = \varphi(M)$.

显然,$\varphi(M) \subset \overline{\varphi(M)} \cap W$ 成立.

反之,任取 $s \in \overline{\varphi(M)} \subset W$,存在 $q \in \varphi(M)$,使得 $s \in V_q$. 由 W 的构造知道,$\varphi(M) \cap V_q$ 是 V_q 中的一个坐标面,所以它是 V_q 中的闭子集. 不难看出

$$\overline{\varphi(M)} \cap V_q = \overline{\varphi(M) \cap V_q}.$$

于是 $s \in \overline{\varphi(M)} \cap V_q$ 蕴涵 $s \in \overline{\varphi(M) \cap V_q}$,这里$\overline{\varphi(M) \cap V_q}$是 $\varphi(M) \cap V_q$ 在 V_q 中的相对闭包. 现在得到 $s \in \overline{\varphi(M)} \cap W$ 蕴涵

$$\varphi(M) \cap V_q \subset \varphi(M),$$

故$\overline{\varphi(M)} \cap W = \varphi(M)$. 必要性得证. 定理证完.

我们给出正则子流形的两个基本性质.

定理 3.4 设(φ, M)为 N 的光滑子流形. 若 M 为紧流形,则 $\varphi: M \to N$ 为正则嵌入.

证 其实,$\varphi(M)$作为 N 的拓扑子空间是一个 Hausdorff 空间,而 $\varphi: M \to \varphi(M) \subset N$ 是紧空间 M 到 Hausdorff 空间的一一连续映射,所以它是同胚,亦即(φ, M)是 N 的正则子流形.

定理 3.5 设 M 为 m 维紧光滑流形,则存在整数 $n \in \boldsymbol{N}$,以及一光滑映射 $\varphi: M \to \boldsymbol{R}^n$,使$(\varphi, M)$为 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则子流形.

证 因 M 为紧流形,故存在 M 的有限开覆盖$\{V_j\}_{j=1}^r$,使得$\overline{V_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$是紧的,且每个$\overline{V_j}$包含在某个坐标系$(U_j, u_i^{(j)})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$的邻域 U_j 中. 利用拓扑学基本定理,存在开集 W_j,使得

$$\overline{V_j} \subset W_j \subset \overline{W_j} \subset U_j.$$

再据本章习题 9,对每个 j,$1 \leqslant j \leqslant r$,存在 M 上的光滑函数 f_j,使得 $0 \leqslant f_j \leqslant 1$,并且有

$$f_j(p) = \begin{cases} 1, & p \in V_j, \\ 0, & p \notin W_j. \end{cases}$$

定义 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 $n=r(m+1)$ 个光滑函数：

$$\begin{cases} x_0^j = f_j, \\ x_i^j(p) = \begin{cases} u_i^{(j)}(p) \cdot f_j(p), & p \in U_j, \\ 0, & p \notin U_j, \end{cases} \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant r$. 视 (x_0^j, x_i^j) 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点，则(3.3)式给出一个映射 $\varphi: M \to \boldsymbol{R}^n$.

我们证明(φ, M)是 $\boldsymbol{R}^n$ 的嵌入子流形.

事实上，对于 $p, q \in M$，若有 $\varphi(p) = \varphi(q)$，则

$$x_0^j(p) = x_0^j(q), \quad x_i^j(p) = x_i^j(q), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant r$. 由于$\{V_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$是 M 的有限开覆盖，故存在 k，$1 \leqslant k \leqslant r$，使 $p \in V_k$，从而得到

$$f_k = x_0^k(q) = x_0^k = f_k(p) = 1,$$

$$u_i^{(k)}(q) = u_i^{(k)}(p), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

这表明 $q \in U_k$，且 q 和 p 在 U_k 中有相同的局部坐标，所以 $p = q$，故映射 φ 是单一的.

另一方面，存在 μ，$1 \leqslant \mu \leqslant r$，使 $p \in V_k$，因此 $f_\mu(p) = 1$. 于是

$$x_i^\mu|_{V_\mu} = u_i^{(\mu)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

并且

$$\left.\frac{\partial(x_1^\mu, \cdots, x_m^\mu)}{\partial(u_1^{(\mu)}, \cdots, u_m^{(\mu)})}\right|_p = 1.$$

这表明切映射 φ_* 在点 p 是非退化的，因此(φ, M)是 $\boldsymbol{R}^n$ 的嵌入子流形. 最后，由定理 3.4 得到本定理的结论.

子流形还有一些其他性质，我们不详述了.

§4 外 代 数

为了进一步讨论流形上的微分与积分，我们介绍张量积、张

量、张量代数及外代数. 除了在下面两节中有应用外，这部分内容在微分几何学、调和分析、群表现理论，以及微分方程等数学分支中也有广泛的应用.

4.1 张量积

设 V,W 为数域 $\mathbb{K}$(C 或 R)上的线性空间，V^* 与 W^* 为 V 与 W 的对偶空间. 由于 V 上未必有拓扑结构，因此 V^* 只是 V 到 $\mathbb{K}$ 上的线性映射所成的线性空间，我们将它记为 $L(V;\mathbb{K})$，以区别 $\mathscr{L}(X;Y)$，后者在第一章中用作连续线性映射空间. 显然 V^* 也是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，并且当 V 为有限维时，V^* 与它具有相同的维数.

定义 4.1 V^* 与 W^* 中的元 v^* 与 w^* 的张量积 $v^*\otimes w^*$ 是积空间 $V\times W$ 到 $\mathbb{K}$ 的二重线性映射 $v^*\otimes w^*: V\times W\to\mathbb{K}$，满足

$$v^*\otimes w^*(v,w)=v^*(v)w^*(w)=\langle v,v^*\rangle\langle w,w^*\rangle,$$

其中 $(v,w)\in V\times W$，而 $v^*(v)=\langle v,v^*\rangle$ 为 v^* 在 v 的值，$w^*(w)=\langle w,w^*\rangle$ 为 w^* 在 w 的值. 显然

$$v^*\otimes w^*\in L((V\times W);\mathbb{K})\equiv L(V,W;\mathbb{K}).$$

空间 V^* 与 W^* 的张量积为由形如 $v^*\otimes w^*$ 的张量积所张成的 $\mathbb{K}$ 上的线性子空间，记为 $V^*\otimes W^*$，并且称 $v^*\otimes w^*$ 为 $V^*\otimes W^*$ 中的单项式.

设 V 与 W 为有限维线性空间，$\dim V=m$，$\dim W=n$. 又设 $\{a_j^*: 1\leqslant j\leqslant m\}$ 与 $\{b_k^*: 1\leqslant k\leqslant n\}$ 分别为 V^* 与 W^* 的基底. 则易证下面的定理成立.

定理 4.1 $V^*\otimes W^*$ 为 $m\times n$ 维线性空间，其基底为 $\{a_j^*\otimes b_k^*: 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n\}$；并且有

$$V^*\otimes W^*=L(V,W;\mathbb{K}).$$

事实上，只要证明任一 $s\in V^*\otimes W^*$ 可表示为 $\{a_j^*\otimes b_k^*\}$ 的线性组合，并证明 $\{a_j^*\otimes b_k^*\}$ 是线性无关的就够了. 这个证明留给读者.

现在利用对偶空间的张量积来定义 V 与 W 的张量积.

定义 4.2 设 V,W 为有限维线性空间. 我们定义 $V\otimes W=(V^*)^*\otimes(W^*)^*$ 为 V 与 W 的张量积. 当 V 的基底为 $\{a_j\}_{j=1}^m$, W 的基底为 $\{b_k\}_{k=1}^n$ 时, $V\otimes W$ 的基底为 $\{a_j\otimes b_k: 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n\}$; 并且也有

$$V\otimes W=L(V^*,W^*;\mathbf{K}).$$

据定理 4.1 与定义 4.2 有

定理 4.2 $V\otimes W$ 与 $V^*\otimes W^*$ 互为对偶空间:

$$V^*\otimes W^*=(V\otimes W)^*,$$

其中元之间的对偶运算定义为

$$\langle v\otimes w, v^*\otimes w^*\rangle=\langle v,v^*\rangle\langle w,w^*\rangle.$$

直接用定义验证即可.

现在给两个例子.

例 4.1 求矩阵的张量积.

设 $A=(\alpha_j^i)$, $B=(\beta_l^k)$, 分别为 $n\times m$ 矩阵与 $r\times s$ 矩阵. 注意到 A^* 与 B^* 分别为 $m\times n$ 与 $s\times r$ 矩阵, 故

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}\alpha_{11}B & \cdots & \alpha_{1m}B\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \alpha_{n1}B & \cdots & \alpha_{nm}B\end{bmatrix},$$

$$B\otimes A=\begin{bmatrix}\beta_{11}A & \cdots & \beta_{1s}A\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \beta_{r1}A & \cdots & \beta_{rs}A\end{bmatrix}.$$

一般说来, $A\times B$ 与 $B\times A$ 并不相等.

例 4.2 设 $V=\boldsymbol{R}^n$, $W=\boldsymbol{R}^m$, 其基底分别取标准自然基底. 试求 $V^*\otimes W^*$ 的标准自然基底.

把 $V=\boldsymbol{R}^n$ 与 $W=\boldsymbol{R}^m$ 的标准自然基底分别记为列向量的形式:

$$e_1=\left.\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right\}n\text{ 个},\quad\cdots,\quad e_n=\left.\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right\}n\text{ 个},$$

与

$$\bar{e}_1 = \left.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} m \text{ 个}, \quad \cdots, \quad \bar{e}_m = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} m \text{ 个},$$

于是,取 V^* 与 W^* 的标准自然基底分别为

$$e_1^* = (\underbrace{1,0,\cdots,0}_{n}), \quad e_n^* = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n}),$$

与

$$\bar{e}_1^* = (\underbrace{1,0,\cdots,0}_{m}), \quad \bar{e}_m^* = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{m}).$$

由于

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \quad \bar{e}_k^*(\bar{e}_l) = \delta_{kl},$$

经过简单推算,我们得到 $V^* \otimes W^*$ 的标准自然基底 $e_j^* \otimes \bar{e}_k^*$ 为

$$e_1^* \otimes \bar{e}_1^* = (\underbrace{\underbrace{1,0,\cdots,0}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{0,\cdots,0}_{n}}_{m}),$$

$$e_1^* \otimes \bar{e}_2^* = (\underbrace{\underbrace{0,1,\cdots,0}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{0,\cdots,0}_{n}}_{m}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$e_1^* \otimes \bar{e}_m^* = (\underbrace{\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{0,\cdots,0}_{n}}_{m}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$e_n^* \otimes \bar{e}_1^* = (\underbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{1,0,\cdots,0}_{n}}_{m}),$$

$$e_n^* \otimes \bar{e}_2^* = (\underbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{0,1,\cdots,0}_{n}}_{m}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$e_n^* \otimes \bar{e}_m^* = (\underbrace{\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\underbrace{0,\cdots,0}_{n};\cdots;\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n}}_{m}).$$

现在给出一个有用的定理.

定理 4.3 设 $h: V\times W\to V\otimes W$ 为映射 $h(v,w)=v\otimes w, v\in V, w\in W$, Z 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 则对每个二重线性映射 $f: V\times W\to Z$, 存在唯一的线性映射 $g: V\otimes W\to Z$, 使得 $f=g\circ h$.

证 对于 $h: v\times w\to v\otimes w$, 构造满足如下关系的映射 $g: V\otimes W\to Z$:

$$g(v\otimes w) = \sum_{i,j} v_i w_j f(a_i,b_j), \quad 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m,$$

其中 $\{a_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 分别为 V 与 W 的基底, 而 v_i 与 w_j 是 v 与 w 关于上述基底的系数.

对于 $v=\sum v_i a_i \in V, w=\sum w_j b_j \in W$, 有

$$\begin{aligned}
g(v\otimes w) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i \otimes \sum_{j=1}^{m} w_j b_j\right) = g\left(\sum_{i,j} v_i w_j a_i b_j\right) \\
&= \sum_{i,j} v_i w_j g(a_i\otimes b_j) = \sum_{i,j} v_i w_j f(a_i,b_j) \\
&= \sum_{i,j} f(v_i a_i, w_j b_j) = f\left(\sum_i v_i a_i, \sum_j w_j b_j\right) \\
&= f(v,w).
\end{aligned}$$

故 g 由 f 唯一确定, 且 $f=g\circ h: V\times W\to Z$. 定理得证.

这个定理的意义在于, 它把 $V\times W$ 上的二重线性映射 f 转化为两个线性映射 g 与 h 的复合; 并且, 据定理 4.3 可得

定理 4.4 $L(V,W;Z)$ 与 $L(V\otimes W;Z)$ 同构.

张量积的定义可以推广到 n 个线性空间的情形, 即可以类似地给出 $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_n^*$ 与 $V_1\otimes\cdots\otimes V_n$ 的定义, 且定理 4.3 也有推广的形式. 请读者自行完成.

4.2 张量与张量代数

把线性空间 V 的对偶空间 V^* 视为 W, 据定义 4.2, 可以定义

它们的张量积,这种张量积以及其中的元在很多学科中都要经常用到.

定义 4.3 设 V 为数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间,V^* 为其对偶空间,张量积

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s} \quad (r,s \geqslant 0)$$

中的元称为 (r,s) 型张量,称 r 为张量的反变阶数,s 为其协变阶数. 特别地,张量积 $V_0^r = V\otimes\cdots\otimes V$ 中的元称为 r 阶反变张量;$V_s^0 = V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ 中的元称为 s 阶协变张量. 我们约定 $V_0^0 = \mathbf{K}$.

设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ 为 V 与 V^* 的基底,易知

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e_{k_1}^* \otimes \cdots e_{k_s}^*\}, \quad 1 \leqslant i_1,\cdots,i_r,k_1,\cdots,k_s \leqslant n$$

为 V_s^r 的基底.

因为 V_s^r 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,故 V_s^r 中的元之间的加法与数乘运算是已经有定义的. 此外,我们可以定义 (r_1,s_1) 型与 (r_2,s_2) 型张量的"乘法"(下面读者会看到,为什么要在其上定义元之间的乘法运算?).

定义 4.4 设 $x \in V_{s_1}^{r_1}$,$y \in V_{s_2}^{r_2}$,定义 x 与 y 的积为

$$\begin{aligned} & x \otimes y(v_1^*,\cdots,v_{r_1+r_2}^*,v_1,\cdots,v_{s_1+s_2}) \\ & = x(v_1^*,\cdots,v_{r_1}^*,v_1,\cdots,v_{s_1}) \cdot y(v_{r_1+1}^*,\cdots,v_{r_1+r_2}^*,\cdots,v_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

由定义可知,(r_1,s_1) 型张量与 (r_2,s_2) 型张量之积为 (r_1+r_2,s_1+s_2) 型张量. 显然,张量乘法满足结合律.

定义了乘法运算之后,可以考虑线性空间的张量代数结构.

记 $T^r(V) = V_0^r$,作直和

$$\sum_{r\geqslant 0} T^r(V) = T^0(V) \oplus T^1(V) \oplus T^2(V) \oplus \cdots.$$

每个元 $x \in \sum\limits_{r\geqslant 0} T^r(V) \equiv T(V)$,有唯一的表示 $x = \sum\limits_{r\geqslant 0} x^r$,$x^r \in T^r(V)$.
这里无限项直和定义为:此和中除有限项外其余项全为 0,但是 x 的非零项的位置随 x 而不同.

易见,$T(V)$ 关于乘法运算是封闭的. 因此 $T(V)$ 关于元的加

法(+),数乘($\alpha\cdot$),乘法($\otimes$)成为一个代数.我们称它为线性空间 V 上的张量代数.同样可以定义直和

$$T(V^*) = \sum_{r\geqslant 0} T^r(V^*), \quad 其中\ T^r(V^*) = V_r^0.$$

$T(V^*)$关于加法(+),数乘($\alpha\cdot$),乘法($\otimes$)成为一个代数,并且 $T(V^*)$与 $T(V)$彼此互为对偶,它们的元 $v_1\otimes\cdots\otimes v_r$ 与 $v_1^*\otimes\cdots\otimes v_r^*$ 之间的对偶积定义为

$$\langle v_1\otimes\cdots\otimes v_r, v_1^*\otimes\cdots\otimes v_r^*\rangle = \langle v_1, v_1^*\rangle\cdots\langle v_r, v_r^*\rangle,$$

其中 $v_j\in V, v_j^*\in V^*$.

现在我们记 $\mathscr{S}(r)$为$\{1,\cdots,r\}$的置换群,即

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{bmatrix} : 1\leqslant k_1,\cdots,k_r\leqslant r\right\}.$$

对每个 $x\in T^r(V)$,定义 $\sigma(x)$为满足

$$\sigma(x)(v_1^*,\cdots,v_r^*) = x(v_{\sigma(1)}^*,\cdots,v_{\sigma(r)}^*), \quad v_i^*\in V^*$$

的 $T^r(r)$中的元.于是对每个 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$,决定了 $T^r(V)$上的一个自同态:

$$\sigma(x+y) = \sigma(x)+\sigma(y), \quad \sigma(\alpha x) = \alpha\sigma(x).$$

定义 4.5 设 $x\in T^r(V)$,若对任意 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$,都有

$$\sigma(x) = x,$$

则称 x 为对称 r 阶反变张量;若有

$$\sigma(x) = \operatorname{sgn}\sigma\cdot x, \quad 其中\ \operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma\ 为偶置换, \\ 0, & \sigma\ 为奇置换, \end{cases}$$

则称 x 为反对称 r 阶反变张量.

定理 4.5 设 $x\in T^r(V)$,则 x 为对称反变张量的充要条件是它的分量关于各指标是对称的;而 x 为反对称反变张量的充要条件是它的分量关于各指标是反对称的.

证 取线性空间 V 的基底$\{e_1,\cdots,e_n\}$,则当 x 是对称反变张量时,对任一个 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$,有

$$x_{i_1\cdots i_r} = x(e_{i_1}^*,\cdots,e_{i_r}^*) = \sigma\big(x(e_{i_1}^*,\cdots,e_{i_r}^*)\big)$$

$$= x(e^*_{\sigma(1)}, \cdots, e^*_{\sigma(r)})$$
$$= x_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r)}};$$

对反对称情形的结论可类似得到.

用记号

$$P^r(V) = \{x \in T^r(V) : \sigma(x) = x, \ \forall\, \sigma \in \mathscr{S}(r)\}$$

表示 r 阶对称反变张量的集,用

$$\Lambda^r(V) = \{x \in T^r(V) : \sigma(x) = \mathrm{sgn}\sigma \cdot x, \ \forall\, \sigma \in \mathscr{S}(r)\}$$

表示 r 阶反对称反变张量的集.

因为置换 $\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ 为自同态,故 $P^r(V)$ 与 $\Lambda^r(V)$ 是 $T^r(V)$ 的线性子空间.

定义 4.6 对 $x \in T^r(V)$,令

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(r)} \sigma(x), \quad A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(r)} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \sigma(x),$$

则 $S_r(x)$ 和 $A_r(x) \in T^r(V)$. 我们称 $S_r(x)$ 为对称化算子,称 $A_r(x)$ 为反对称化算子.

定理 4.6 $P^r(V) = S_r(T^r(V)), \Lambda^r(V) = A_r(T^r(V))$.

证 只需验证:对任意 $\tau \in \mathscr{S}(r)$,有

$$\tau(S_r(x)) = S_r(x), \quad \tau(A_r(x)) = \mathrm{sgn}\tau \cdot A_r(x).$$

请读者自行验证.

以上讨论可以完全改为对 $T^r(V^*)$ 进行,所得到的是 r 阶协变张量的结果. 定义与结论也类似.

读者一定注意到,$T(V)$ 与 $T(V^*)$ 是无限维的线性空间. 然而我们希望能得到有限维的张量代数,这在应用时将是很方便的. 为此,在下面小节中要引入张量的外积.

4.3 外代数

反对称的反变与协变张量在流形的讨论中占重要地位.

定义 4.7 我们称反对称 r 阶反变张量为 r 次外矢量,称反对称 r 阶协变张量为 r 次外形式. 并称 $\Lambda^r(V)$ 为 r 次外矢量空间,

$\Lambda^r(V^*)$为 r 次外形式空间.

定义 4.8 设 ξ 为 k 次外矢量,η 为 l 次外矢量,令

$$\xi \wedge \eta = A_{k+l}(\xi \otimes \eta),$$

则 $\xi\wedge\eta\in\Lambda^{k+l}(V)$. 称 $\xi\wedge\eta$ 为 ξ 与 η 的外积.

定理 4.7 外积有如下运算规律:设 $\xi,\xi_1,\xi_2\in\Lambda^k(V)$,$\eta,\eta_1,\eta_2\in\Lambda^l(V)$,$\zeta\in\Lambda^h(V)$,则

(1) **分配律**:

$$(\xi_1 + \xi_2)\wedge\eta = \xi_1\wedge\eta + \xi_2\wedge\eta,$$
$$\xi\wedge(\eta_1 + \eta_2) = \xi\wedge\eta_1 + \xi\wedge\eta_2;$$

(2) **反交换律**: $\xi\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi$;

(3) **结合律**: $(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$.

证 (1) 显然.

(2) 因 $\xi\wedge\eta$ 是反对称的,故对 $\tau\in\mathscr{S}(k+l)$,有

$$\tau(\xi\wedge\eta) = \mathrm{sgn}\tau\cdot\xi\wedge\eta.$$

取

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & \cdots & k+l & l & \cdots & l \end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{sgn}\tau = (-1)^{kl}$,然后直接计算 $\xi\wedge\eta(v_1^*,\cdots,v_{k+l}^*)$,便得(2).

(3) 由定义,可写出

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta = A_{k+l+h}(\xi\otimes\eta\otimes\zeta).$$

同理可得 $\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)=A_{k+l+h}(\xi\otimes\eta\otimes\zeta)$. 故(3)得证.

定理 4.8 若 $\xi,\eta\in\Lambda^1(V)$,则 $\xi\wedge\eta=-\eta\wedge\xi$. 从而对任意 $\xi\in\Lambda^1(V)$,有 $\xi\wedge\xi=0$. 由此推出,若一个外积单项式中含两个相同的一次因子,则该式为 0.

这个定理是建立外代数的基本定理. 据此定理,我们有

定理 4.9 次数 r 大于 V 的维数 n 的外矢量都是零. 亦即 $\Lambda^r(V)=0$ 对 $r>n$ 成立.

这个定理的意义在于:我们只需要讨论空间 $\Lambda^r(V)$,$r\leqslant n$ 的情形,而它们都是有限维空间.

定理 4.10 r 次外矢量空间 $\Lambda^r(V)$的维数是

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

证 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$为 V 的一个基底,我们证明$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}:1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$构成 $\Lambda^r(V)$的基底,这可由 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$的求值公式得到. 取 V^* 中的任意 r 个元 $v_1^*,\cdots,v_r^*$,则 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$的求值公式为

$$\begin{aligned}
&e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(v_1^*,\cdots,v_r^*)\\
&=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\langle e_{i_1},v_{\sigma(1)}^*\rangle\cdots\langle e_{i_r},v_{\sigma(r)}^*\rangle\\
&=\frac{1}{r!}\begin{vmatrix}\langle e_{i_1},v_1^*\rangle & \cdots & \langle e_{i_1},v_r^*\rangle\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \langle e_{i_r},v_1^*\rangle & \cdots & \langle e_{i_r},v_r^*\rangle\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

特别地,

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(e_{j_1}^*,\cdots,e_{j_r}^*)=\frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r},$$

$\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}$为广义 Kronecker 符号:

$$\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}=\begin{cases}1, & \text{当 } i_1,\cdots,i_r \text{ 互不相同,且}\{j_1,\cdots,j_r\}\\ & \quad\text{为}\{i_1,\cdots,i_r\}\text{ 的偶置换,}\\ -1, & \text{当 } i_1,\cdots,i_r \text{ 互不相同,且}\{j_1,\cdots,j_r\}\\ & \quad\text{为}\{i_1,\cdots,i_r\}\text{ 的奇置换,}\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

显然,$e_1\wedge\cdots\wedge e_n(e_1^*,\cdots,e_n^*)=\dfrac{1}{n!}$, 并且

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\},\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$$

是线性无关的,这可由外积的定义与性质直接证明. 从而 $\Lambda^r(V)$的维数是 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

定义 4.9 设

$$\Lambda(V) = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r(V),$$

则 $\Lambda(V)$是数域 $\mathbf{K}$ 上的 2^n 维线性空间，并且关于加法、数乘与外积运算成为一个分次代数，亦即 $\Lambda(V)$是一列线性空间 $\Lambda^r(V)$的直和. 设其中的元

$$\xi = \sum_{r=0}^{n} \xi^r, \quad \eta = \sum_{r=0}^{n} \eta^r, \quad \xi^r, \eta^r \in \Lambda^r(V),$$

它们的运算如下：

（1） 外矢量的加法（+）运算：

$$\xi + \eta = \sum_{r=0}^{n} (\xi^r + \eta^r);$$

（2） 外矢量与数 $\alpha \in \mathbf{K}$ 的乘法（$\alpha\cdot$）：

$$\alpha\xi = \sum_{r=0}^{n} \alpha\xi^r;$$

（3） 外矢量 ξ 与外矢量 η 的外积（$\wedge$）：

$$\xi \wedge \eta = \sum_{r,s=0}^{n} \xi^r \wedge \eta^s,$$

则 $\Lambda(V)$成为一个分次代数，称为矢量空间 V 的外代数，又称它为 Grassmann 代数.

完全同样的讨论，我们定义对偶空间 V^* 上的外代数

$$\Lambda(V^*) = \sum_{r=0}^{n} \Lambda^r(V^*).$$

定理 4.11 $\Lambda^r(V)$与 $\Lambda^r(V^*)$互为对偶空间，

$$(\Lambda^r(V))^* = \Lambda^r(V^*),$$

对偶运算为

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v_1^* \wedge \cdots \wedge v_r^* \rangle = \det(\langle v_i, v_j^* \rangle),$$

其中 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \Lambda^r(V)$， $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_r^* \in \Lambda^r(V^*)$.

外代数是研究微分流形的重要工具. 下面仅给出两个简单的应用.

定理 4.12 元 $v_1, \cdots, v_r \in V$ 线性无关，当且仅当

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0.$$

定理 4.13(Cartan 引理) 设 $v_1, \cdots, v_r$ 与 $w_1, \cdots, w_r$ 为 V 中的两组元,满足关系

$$\sum_{k=1}^{r} v_k \wedge w_k = 0.$$

若 $v_1, \cdots, v_r$ 线性无关,则 w_k 可表示为它们的线性组合

$$w_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} v_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

并且 $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$.

证 因 $v_1, \cdots, v_r$ 线性无关,故可将它扩充为 V 的一个基底

$$\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}.$$

于是

$$w_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} v_j + \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_{kj} v_j.$$

利用假设条件

$$\sum_{k=1}^{r} v_k \wedge w_k = 0,$$

将 w_k 的上述表示代入,即可推出 $\alpha_{kj} = 0$ 对于 $j = r+1, \cdots, n$ 成立,并且当 $1 \leqslant k, j \leqslant r$ 时,$\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$.

§5 外 微 分

5.1 矢量丛与张量丛

定义 5.1 设 E, M 为两个光滑流形;$\pi: E \to M$ 为映上的光滑映射;$V \cong \boldsymbol{R}^q$ 为 q 维线性空间. 设在 M 上给定一个开覆盖 $\{U, W, Z, \cdots\}$ 与一组映射 $\{\varphi_U\}$,满足

(1) 每个 $\varphi_U: U \times \boldsymbol{R}^q \to \pi^{-1}(U)$ 为可微同胚,且对任意的 $(p, y) \in U \times \boldsymbol{R}^q$,有 $\pi \circ \varphi_U(p, y) = y$,

(2) 对每个固定的 $p \in U$,令 $\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y)$,则每个映射

$\varphi_{U,p}: \boldsymbol{R}^q \to \pi^{-1}(p)$为同胚映射. 并且当$U \cap W \neq \varnothing$时,对任意$p \in U \cap W$,映射

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : \boldsymbol{R}^q \to \boldsymbol{R}^q$$

为$\boldsymbol{R}^q$上的线性自同构,即$g_{UW}(p) \in GL(V)$,这里$GL(V)$表示$\boldsymbol{R}^q$上线性自同构的全体所成的集,

(3) 对于$U \cap W \neq \varnothing$,映射$g_{UW}: U \cap W \to GL(V)$为光滑映射,则称$(E, M, \rho)$为流形$M$上的$q$维矢量丛,并称$E$为丛空间,$M$为底空间,$\pi$为丛投影,$V$为纤维型,$\pi^{-1}(p)$为矢量丛$(E, M, \pi)$在$p$点上的纤维,而函数族$\{g_{UW}\}$称为矢量丛$(E, M, \pi)$的过渡函数族.

过渡函数族满足如下条件.

定理 5.1 利用定义 5.1 的记号,过渡函数族$\{g_{UW}\}$满足下述相容条件:

(1) 对于$p \in U$,$g_{UU}(p)$为V到V的恒同映射I;

(2) 若$p \in U \cap W \cap Z \neq \varnothing$,则

$$g_{UW}(p) \circ g_{WZ}(p) \circ g_{ZU}(p) = I : V \to V.$$

其实,上述相容条件也是使$\{g_{UW}\}$成为过渡函数族的充分条件,因为有如下定理.

定理 5.2 设M为m维光滑流形,$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$为$M$的一个开覆盖,$V$为$q$维线性空间. 若对任一对$\alpha, \beta \in \mathscr{A}$,都有一个光滑映射$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$与之对应,且满足定理 5.1 中的相容条件. 则存在M上的q维矢量丛(E, M, π),它以$\{g_{\alpha\beta}\}$为过渡函数族.

证 我们简述证明步骤. 构造一集合

$$\widetilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \{\alpha\} \times U_\alpha \times V,$$

它是一个微分流形. 在$\widetilde{E}$上定义等价关系$\sim$如下:

$$(\alpha, p, y) \sim (\beta, p', y') \Leftrightarrow p' = p \in U_\alpha \cap U_\beta,$$
$$y' = y \cdot g_{\alpha\beta}(p).$$

于是商空间$E = \widetilde{E}/\sim$成为一个光滑流形,其中的元记为$[\alpha, p, y]$.

由 $\pi([\alpha,p,y])=p$ 定义一个映射 $\pi: E\to M$. 可以证明(E,M,π)为一个矢量丛,π 是其丛投影,而函数集$\{g_{\alpha\beta}\}$则是其过渡函数族.

由定理可知,构造矢量丛,只要给出过渡函数族就够了.

例 5.1 平凡丛.

设 M 为光滑流形,则 $E=M\times R^q$ 成为丛空间. 称这个矢量丛为 M 上的平凡丛.

例 5.2 矢量丛的对偶丛.

设(E,M,π)为一个矢量丛,取 V 的对偶空间 V^*,设(E^*,M,π^*)为 M 上的以 V^* 为纤维型的矢量丛,π^* 为其丛投影. 记 E^* 的局部积结构(亦即满足定义 5.1 的$\{U\}$及$\{\varphi_U\}$)为$\{U\}$与$\{\psi_U\}$. 若对任一元 $p\in U\cap W\neq\varnothing$,当 $y_U,y_W\in V$ 与 $\lambda_U,\lambda_W\in V^*$,并有

$$\varphi_U(p,y_U)=\varphi_W(p,y_W),\quad \psi_U(p,\lambda_U)=\psi_W(p,\lambda_W)$$

成立时,总有$\langle y_U,\lambda_U\rangle=\langle y_W,\lambda_W\rangle$,我们便称$(E^*,M,\pi^*)$为$(E,M,\pi)$的对偶丛. 此时,可定义两个纤维 $\pi^{-1}(p)$与$(\pi^*)^{-1}(p)$之间的配合,其定义为

$$\langle\varphi_U(p,y_U),\psi_U(p,\lambda_U)\rangle=\langle y_U,\lambda_U\rangle,$$

并与 U 的选取无关.

现在讨论流形 M 上的(r,s)张量丛.

设 M 为 m 维光滑流形,$p\in M$,T_p 与 T_p^* 分别为 M 在 p 点的切空间与余切空间,定义 p 点的(r,s)型张量空间为

$$T_s^r(p)\equiv T_p\otimes\cdots\otimes T_p\otimes T_p^*\otimes\cdots\otimes T_p^*,\quad r,s\geqslant 0,$$

它是 m^{r+s} 维线性空间. 作一个隔离并

$$T_s^r=\bigcup_{p\in M}T_s^r(p).$$

在 T_s^r 上,按下面的方式(1)引进拓扑结构,使它成为具可数基的 T_2 型空间;再按(2)引进其 C^∞ 微分结构,使它成为一个光滑流形. 在上述拓扑结构与 C^∞ 微分结构下,T_s^r 成为流形 M 上的一个矢量丛,就是所需要的(r,s)型张量丛. 在 M 上取定一个坐标 U,假设 $u_1,\cdots,u_m$ 为局部坐标. 取 T_p^* 的自然基底$\{(\mathrm{d}u_1)_p,\cdots,(\mathrm{d}u_m)_p\}$与

T_p 的对偶基底

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_m}\right)_p\right\}.$$

从而 $T_s^r(p)$ 的基底为

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}u_{j_1})_p \otimes \cdots \right.$$

$$\left. \otimes (\mathrm{d}u_{j_s}), \quad 1 \leqslant i_\alpha, \ j_\beta \leqslant m\right\}.$$

(1) T_s^r 上的拓扑结构：定义映射

$$\varphi_U : U \times V_s^r \to \bigcup_{p \in U} T_s^r(p),$$

使对任意 $p \in U, y \in V_s^r$，有 $\varphi_U(p, y) \in T_s^r(p)$，并使 $\varphi_U(p, y)$ 关于 $T_s^r(p)$ 的基底的分量与 y 关于 V_s^r 的基底的分量相一致.

取 M 的一个坐标覆盖 $\{U\}$，相应的上述映射集为 $\{\varphi_U\}$. 现在，把 $U \times V_s^r$ 的各开子集在 φ_U 之下的像取作 T_s^r 的拓扑基，便可确定 T_s^r 上的拓扑，使之成为 T_2 型空间，而且 φ_U 是一个同胚.

(2) T_s^r 上的微分流形结构：对任意固定的点 $p \in U \subset M$，定义映射

$$\varphi_{U,p} : V_s^r \to T_s^r(p),$$

使对 $y \in V_s^r$ 有

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y),$$

这里 φ_U 就是(1)中所定义的. 由此可知，$\varphi_{U,p}$ 是 V_s^r 到 $T_s^r(p)$ 的线性同构.

设 $p \in W \subset M$，且 W 的局部坐标为 $w_1, \cdots, w_m$，令

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : V_s^r \to V_s^r. \tag{5.1}$$

则 $g_{UW}(p) \in GL(V_s^r)$. 还可看出，对 $y, y' \in V_s^r$，有

$$\varphi_U(p, y) = \varphi_W(p, y') \Leftrightarrow y' = y \cdot g_{UW}(p). \tag{5.2}$$

利用 T_p 和 T_p^* 的自然基底及 V_s^r 的基底之下元的表示，可以证明，映射

$$g_{UW} : U \cap W \to GL(V_s^r), \quad U \cap W \neq \varnothing$$

为光滑映射(对 r,s 用归纳法).

按照(1)中所给的 T_s^r 的拓扑结构,$\{\varphi_U(U\times V_s^r)\}$构成 T_s^r 的坐标开覆盖,并且在每个坐标域 $\varphi_U(U\times V_s^r)$上,点 $\varphi_U(p,y)$的坐标是$\left(u_i(p),y_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\right)$,其中 u_i 是 M 在坐标域 U 上的局部坐标,而 $y_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ 为 $y\in V_s^r$ 的坐标,由于 $U\cap W\neq\varnothing$ 时 g_{UW}的光滑性,(5.2)式表明,T_s^r 的坐标覆盖是 C^∞ 相容的. 因此 T_s^r 成为一个光滑流形. 此时,自然投影 $\pi: T_s^r\to M$ 映射 $T_s^r(p)$中的元到 $p\in M$,它是光滑的满射.

按以上方法构造的光滑流形 T_s^r 称为 M 上的(r,s)型张量丛,π 称为丛投影,空间 $T_s^r(p)$称为丛在 p 点的纤维. 称(1,0)型张量丛为 M 的切丛,记为 $T(M)$;而称 M 上的(0,1)型张量丛为 M 的余切丛.

我们可构造 M 上的 r 次外矢量丛

$$\Lambda^r(M)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T^p)$$

与 r 次外形式丛

$$\Lambda^r(M^*)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_p^*).$$

由定义 5.1 可知,矢量丛的概念与张量丛的构造有着密切的联系.

最后给出光滑截面的概念.

定义 5.2 设 $f: M\to T_s^r$ 为光滑映射. 若

$$\pi\circ f=I: M\to M,$$

即对任意 $p\in M$,有 $f(p)\in T_s^r(p)$,则称 f 为张量丛 T_s^r 的一个光滑截面,或称为 M 上的(r,s)型光滑张量场. 与 §2 的定义比较,可见切丛的截面就是 M 的切矢量场. 余切丛的截面称为 M 上的一次微分式,而外形式丛 $\Lambda^r(M^*)$的光滑截面称为 M 上的 r 次外微分式(与 5.2 对比).

对于矢量丛(E,M,π),若光滑映射 $S: M\to E$ 满足 $\pi\circ S=I: M\to M$,则称 S 为(E,M,π)的一个光滑截面. 用 $\Gamma(E)$记它的

全体光滑截面的集合.

5.2 外微分

如 5.1 中的定义，记 M 为 m 维光滑流形. M 上的 r 次外形式丛

$$\Lambda^r(M^*) = \bigcup_{p\in M} \Lambda^r(T_p^*)$$

是 M 上的一个特殊的矢量丛，它的光滑截面所成的集记为

$$A^r(M) = \Gamma(\Lambda^r(M^*)),$$

其中的元，称为 M 上的 r 次外微分式，是 M 上的光滑反对称 r 阶协变张量场.

又若用 §4 定义与记号，取 $V=T_p^*$，则 T_p^* 上的外代数为

$$\Lambda(T_p^*) = \sum_{r=0}^{m} \Lambda^r(T_p^*).$$

现在，可构造 M 上的外形式丛

$$\Lambda(M^*) = \bigcup_{p\in M} \Lambda(T_p^*).$$

它的截面所成的集 $\Gamma(\Lambda(M^*))$ 记为 $A(M)$，称 $A(M)$ 中的元为 M 的外微分式. 显然

$$\Gamma(\Lambda(M^*)) = A(M) = \sum_{r=0}^{m} A^r(M),$$

这里的和代表直和. 因此每个外微分式 $\omega\in A(M)$ 有直和表示式

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^m,$$

其中 $\omega^r\in A^r(M)$ 为 r 次外微分式，$0\leqslant r\leqslant m$.

$A(M)$ 中的元的运算定义如下：

$(\omega_1+\omega_2)(p)=\omega_1(p)+\omega_2(p)$,

$(\alpha\omega)(p)=\alpha\omega(p)$,

$(\omega_1\wedge\omega_2)(p)=\omega_1(p)\wedge\omega_2(p)$,

这里等式右边的 $\wedge$ 是指外形式之间的外积（§4 定义 4.7）. 这样，$A(M)$ 构成一个分次代数，它是一列线性空间的直和，称 $A(M)$ 为

外微分式空间.

注1 M 的 r 次外矢量丛 $\Lambda^r(M)$ 与 r 次外形式丛 $\Lambda^r(M^*)$ 是互为对偶的,且 $\Lambda^r(M)$ 与 $\Lambda^r(M^*)$ 在同一点 $p\in M$ 上的纤维之间的配合可由 $\Lambda^r(T_p)$ 与 $\Lambda^r(T_p^*)$ 之间的配合诱导出来(见定理 4.10).

注2 对 r 次外微分式 $\omega\in A(M)$,若取定一个坐标域 U,则在相应的局部坐标 $u_1,\cdots,u_m$ 下,$\omega|_U$ 在 U 上可表示为:

$$\omega|_U=\alpha_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}u_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{i_r},$$

其中 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ 是 U 上的光滑函数,它关于下标是反对称的,并且

$$\alpha_{i_1\cdots i_r}=\frac{1}{r!}\left\langle\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u_{i_r}},\omega\right\rangle.$$

注3 在流形理论中,外微分式空间 $A(M)$ 的重要性在于:在其上可以定义所谓的外微分运算 d,并且这种运算满足 $\mathrm{d}^2=0$.

定理 5.3 设 M 为 m 维光滑流形,$A(M)$ 为 M 的外微分式空间. 则存在唯一的一个映射 $\mathrm{d}: A(M)\to A(M)$,使得 $\mathrm{d}(A^r(M))\subset A^{r+1}(M)$,并满足

(1) 对任意 $\omega_1,\omega_2\in A(M)$,有 $\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1+\mathrm{d}\omega_2$;

(2) 设 ω_1 为 r 次外微分式,则

$\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_2$;

(3) 若 $f\in C^\infty(M)=A^0(M)$,则 $\mathrm{d}f$ 恰为 f 的微分;

(4) 若 $f\in A^0(M)$,则 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$.

我们称上述映射 d 为外微分.

证 证明分为三步.

第一步,证明:若满足条件(1)~(4)的算子存在,则它是一个局部算子. 亦即:若 $\omega_1,\omega_2\in A(M)$,且在 M 的一个开集 U 中,有 $\omega_1|_U=\omega_2|_U$,则也有 $\mathrm{d}\omega_1|_U=\mathrm{d}\omega_2|_U$.

由条件(1),只需证明 $\omega|_U=0$ 蕴涵 $(\mathrm{d}\omega)|_U=0$.

对每一个 $p\in U$,存在开邻域 $W=W_p$,使 $p\in W\subset\overline{W}\subset U$. 从而据流形上的 Uryhson 引理,存在光滑函数 $h: M\to R^1$,满足

$$h(p') = \begin{cases} 1, & p' \in W, \\ 0, & p' \notin U, \end{cases} \quad 且\ 0 \leqslant h \leqslant 1.$$

不难推得 $h\omega \in A(M)$，且 $h\omega \equiv 0$. 再由 $h \in A^0(M)$，$\omega \in A(M)$，可得

$$\mathrm{d}h \wedge \omega + h\mathrm{d}\omega = 0,$$

所以

$$(\mathrm{d}h \wedge \omega)|_W + (h\mathrm{d}\omega)|_W = 0.$$

推算得 $(\mathrm{d}h \wedge \omega)|_W = 0$. 因 $h|_W = 0$，故 $\mathrm{d}\omega|_W = 0$. 据 $p \in U$ 的任意性便得 $\mathrm{d}\omega|_U = 0$. 局部性得证.

第二步，证明：算子 d 的存在性.

设 $\omega \in A(M)$，我们首先在 M 的一开集 U 上定义 $\mathrm{d}\omega$. 对于 $p \in U$，据本章习题 9，存在 $U_1 \subset U$，$p \in U_1$，并且存在定义于 M 上的函数 $\tilde{\omega}$，使得

$$\tilde{\omega}|_{U_1} = \omega|_{U_1}.$$

下面只需定义 $\mathrm{d}\omega|_{U_1} = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_{U_1}$，并注意到 d 的局部性，$\mathrm{d}\omega|_{U_1}$ 与 $\tilde{\omega}$ 的选择无关，故也只需在局部坐标域 U_1 中定义 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$. 又因 $A(M) = \Gamma(\Lambda(M^*))$，而 $\Lambda(M^*)$ 是一个 Grassmann 代数，于是由假设(2)，只要对 $\tilde{\omega}$ 是单项式的情形定义 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ 就够了. 令

$$\tilde{\omega} = \alpha_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{i_r} \equiv \alpha \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{i_r},$$

则

$$\mathrm{d}\tilde{\omega} = \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}u_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{i_r},$$

从而便可定义 $\mathrm{d}\omega|_{U_1} = \mathrm{d}\tilde{\omega}|_{U_1}$. 余下的只要证明这样定义的 d 是满足(1)～(4)的算子，通过计算可以完成这一点，我们把它留作习题.

第三步，证明：唯一性.

利用外微分算子的局部性以及第二步定义的 $\mathrm{d}\omega$ 在局部坐标域内的唯一性，可得在两个坐标域 U, W 中有

$$\mathrm{d}(\omega|_U)|_{U\cap W} = \mathrm{d}(\omega|_{U\cap(U\cap W)}) = \mathrm{d}(\omega|_{U\cap W}),$$

$$\mathrm{d}(\omega|_W)|_{U\cap W} = \mathrm{d}(\omega|_{W\cap(U\cap W)}) = \mathrm{d}(\omega|_{U\cap W}).$$

所以在U与W中分别定义的外微分算子d，在交集$U\cap W$上便一致了．唯一性得证．

定理 5.4（Poincaré 引理） $d^2=0$，亦即对任意外微分式$\omega\in A(M)$，都有$d^2\omega=d(d\omega)=0$.

证 据d的线性与其局部性，只要对ω是单项式的情形证明就够了．设

$$\omega=\alpha du_1\wedge\cdots\wedge du_r,$$

据定义

$$d\omega=d\alpha\wedge du_1\wedge\cdots\wedge du_r.$$

利用d满足的条件(2)与(4)，对$d\omega$再微分一次，立即得

$$\begin{aligned}d(d\omega)&=d(d\alpha)\wedge du_1\wedge\cdots\wedge du_r\\&\quad-d\alpha\wedge d(du_1)\wedge\cdots\wedge du_r+\cdots=0.\end{aligned}$$

定理得证．

例 5.3 设$\boldsymbol{R}^3$中的坐标系为x,y,z.

(1) 若$f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$，则

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

且$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

(2) 若$a=Adx+Bdy+Cdz$，$A,B,C\in C^\infty(\boldsymbol{R})$．则

$$\begin{aligned}d\alpha&=dA\wedge dx+dB\wedge dy+dC\wedge dz\\&=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\&\quad+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy;\end{aligned}$$

若令$X=(A,B,C)$，则我们有

$$\operatorname{crul}X=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right).$$

(3) 设$b=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$，则

$$db=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= (\mathrm{div}X)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

这里 $X=(A,B,C)$.

由定理 5.4 立即得到场论中的基本公式:

$$\mathrm{crul}(\mathrm{grad}f) = 0, \quad \mathrm{div}(\mathrm{curl}X) = 0.$$

定理 5.5 设 ω 是光滑流形 M 上的一次微分式,X,Y 为 M 上的光滑切矢量场,则

$$\langle X \wedge Y, \mathrm{d}\omega\rangle = X\langle Y,\omega\rangle - Y\langle X,\omega\rangle - \langle [X,Y],\omega\rangle.$$

证 只需对 ω 为单项式 $\omega=g\mathrm{d}f$ 情形证明,我们留给读者.

§6 积分, Stokes 公式

6.1 光滑流形的定向

定义 6.1 设 M 为 m 维光滑流形. 称 M 为可定向的,若在 M 上存在一个连续的,处处不为零的 m 次外微分式 ω. 若 M 为可定向的,则称 M 为定向流形,称 ω 为 M 的一个定向外微分式.

若 M 有两个定向外微分式 ω_1 与 ω_2,满足

$$\omega_1 = f\omega_2,$$

这里 $f|_M>0$,则称 ω_1 与 ω_2 规定了 M 的同一个定向.

设 M 为定向流形,其定向由定向外微分式 ω 给出. 则对 M 的任一个局部坐标系 (U,u_j),$\omega\in A^m(M)$ 可表为

$$\omega|_U = \alpha\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_m, \quad \alpha \neq 0.$$

若 $\alpha|_U>0$,则称 (U,u_i) 是与 M 的定向相符的坐标系.

定义 6.2 设 $f: M\to \boldsymbol{R}$ 为 M 上的实值连续函数,称集合

$$\mathrm{supp}f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

为 f 的支集. 若 $\varphi\in A(M)$ 为 M 的外微分式,称集合

$$\mathrm{supp}\varphi = \overline{\{p \in M : \varphi(p) \neq 0\}}$$

为 φ 的支集.

定义 6.3 设 M 为光滑流形,Σ_0 为 M 的一个开覆盖. 若 M 的

任一紧子集只与 Σ_0 中有限多个开集相交，则称 Σ_0 为 M 的局部有限开覆盖.

给出关于局部有限覆盖的两个重要定理.

定理 6.1 设 Σ 为 M 的一个拓扑基，则存在 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，使得 Σ_0 为 M 的局部有限开覆盖.

证 因为 M 是满足第二可数公理的光滑流形，它是局部紧的且有可数开基. 故存在 $\{U_j\}$，使得

$$M \subset \bigcup_j U_j,$$

这里 U_j 为开集，而其闭包 $\overline{U}_j$ 为紧集. 作有限并

$$P_i = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} \overline{U}_j,$$

则 P_i 为紧集，满足 $P_i \subset P_{i+1}$ 与 $\bigcap_i P_i = M$.

为了构造 Σ_0，下面构造另一紧子集序列 Q_i，满足

$$P_i \subset Q_i \subset Q_{i+1}. \tag{6.1}$$

其实，取 $Q = P_1$. 设 $Q_1, \cdots, Q_i$ 已构造好，其中每个 Q_i 都是紧集，且满足(6.1)式. 由于 $Q_i \cup P_{i+1}$是紧集，因此存在有限多个 U_α，$1 \leqslant \alpha \leqslant s$，使

$$Q_i \cup P_{i+1} \subset \bigcup_{\alpha=1}^{s} U_\alpha.$$

令

$$Q_{i+1} = \bigcup_{1 \leqslant \alpha \leqslant s} \overline{U}_\alpha,$$

则不难验证 Q_{i+1}满足(6.1)式(作为习题)，且

$$Q_i \subset \mathring{Q}_{i+1} \quad 以及 \quad \bigcup_{i+1}^{\infty} Q_i = M.$$

对于每个 i，$1 \leqslant i < \infty$，令

$$L_i = Q_i - Q_{i-1}, \quad K_i = Q_{i+1} - Q_{i-2},$$

并约定 $Q_{-1} = Q_0 = \varnothing$. 显然 L_i 为紧集，K_i 为开集，且 $L_i \subset K_i$. 于是对每个 i，存在 $V_\alpha^{(i)} \in \Sigma$，$1 \leqslant \alpha \leqslant r_i$，使得

$$L_i \subset \bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant r_i} V_\alpha^{(i)} \subset K_i.$$

由 $\bigcup_i L_i = \bigcup_i (Q_i - Q_{i-1}) = \bigcup_i Q_i = M$，得知

$$\Sigma_0 = \{V_\alpha^{(i)} : 1 \leqslant \alpha \leqslant r_i, 1 \leqslant i < \infty\}$$

是 Σ 的一个子覆盖.

最后证明 Σ_0 是局部有限的.

对每个紧子集 $A \subset M$，由于

$$\bigcup_{1\leqslant j\leqslant i} \overline{U}_j = P_i,$$

存在 $i \in N$，使得 $A \subset P_i \subset Q_i$，而当 $k \geqslant i+2$ 时，有

$$K_k = \mathring{Q}_{k+1} - Q_{k-2} \subset \mathring{Q}_{k+1} - Q_i,$$

故推知 $K_k \cap Q_i = \varnothing$，而且对所有的 $\alpha(1 \leqslant \alpha \leqslant r_k)$，与对所有的 $k \geqslant i+2$，下式皆成立

$$V_\alpha^{(k)} \cap A \subset K_k \cap Q_i = \varnothing,$$

从而 Σ_0 中与 A 相交的集至多有有限多个. 定理得证.

定理 6.2（单位分解定理） 设 Σ 为光滑流形 M 的一个开覆盖. 则存在 M 上的一族光滑函数 $\{g_\alpha\}$，满足

（1）对每个 α，有 $0 \leqslant g_\alpha \leqslant 1$，且 $\mathrm{supp} g_\alpha$ 为紧集，并且存在开集 $W_i \in \Sigma$，使得

$$\mathrm{supp} g_\alpha \subset W_i;$$

（2）对每个 $p \in M$，存在邻域 U，使 U 只与有限多个支集 $\mathrm{supp} g_\alpha$ 相交；

（3）$\sum_\alpha g_\alpha = 1.$

我们称 $\{g_\alpha\}$ 为从属于开覆盖 Σ 的单位分解.

证 因 M 为光滑流形，故存在 M 的拓扑基 $\Sigma_0 = \{U_\alpha\}$，对每个 α 满足：

（a）U_α 是坐标域；

（b）$\overline{U}_\alpha$ 为紧集；

(c) 存在 $W_j \in \Sigma$，使得 $\overline{U}_\alpha \subset W_j$.

据定理 6.1，Σ_0 有局部有限的子覆盖. 不失一般性，就设 Σ_0 为该局部有限开覆盖，且由 M 满足第二可数公理，可设

$$\Sigma_0 = \{U_i\}_{i=1,2,\cdots}.$$

用归纳法不难证明，Σ_0 中的 U_α 可收缩为 V_α，使得：

(d) $\{V_\alpha\}$仍然构成 M 的开覆盖；

(e) $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

利用定理 6.1 与本章习题 9，存在 M 上的光滑函数 h_α，使得

$$h_\alpha(p) = \begin{cases} 1, & p \in V_\alpha, \\ 0, & p \notin U_\alpha, \end{cases} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

于是有 $\mathrm{supp} h_\alpha \subset \overline{U}_\alpha$.

另一方面，由 M 的局部紧性，对每个 $p \in M$，存在邻域 U，使 $\overline{U}$ 为紧集. 据假设，Σ_0 为局部有限，故 $\overline{U}$ 仅与 Σ_0 中的有限多个邻域相交，因此和式 $\sum\limits_\alpha h_\alpha(p)$ 中仅有有限多项不为零. 于是，$h = \sum\limits_\alpha h_\alpha$ 在 M 上有定义，且为光滑函数.

据 (e)，$\bigcup\limits_\alpha V_\alpha \subset M$，每个 $p \in M$ 都对应于某个指标 α，故 $h(p) \neq 0$. 令

$$g_\alpha = h_\alpha / h.$$

则 g_α 是 M 上的光滑函数，而且$\{g_\alpha\}$是适合定理条件的光滑函数族. 定理得证.

6.2 外微分式的积分

设 M 为 m 维的定向光滑流形. 我们首先定义 M 上的 m 次外微分式 $\varphi \in A(M)$的积分.

取一个与 M 的定向相符的坐标开覆盖 $\Sigma = \{W_i\}$，以及一个从属于 Σ 的单位分解$\{g_\alpha\}$. 设 $\varphi \in A(M)$具有紧支集. 则

$$\varphi = \Big(\sum_\alpha g_\alpha\Big)\varphi = \sum_\alpha g_\alpha \varphi,$$

并且 $\mathrm{supp}(g_\alpha\varphi)\subset\mathrm{supp}g_\alpha\subset W_i, W_i\in\Sigma$. 于是对每个 $g_\alpha\varphi$,定义它在 M 上的积分

$$\int_M g_\alpha\varphi=\int_{W_i}g_\alpha\varphi\equiv\int_{W_i}f(u_1,\cdots,u_m)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_m, \tag{6.2}$$

上式右边积分是 Riemann 意义之下的,而 $f(u_1,\cdots,u_m)\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m$ 是 $g_\alpha\varphi$ 在关于 W_i 中的坐标系 $u_1,\cdots,u_m$ 的表示. 我们证明,(6.2)式右边的积分与 W_i 的选择无关.

事实上,取两个 W_i 与 $\widetilde{W}_i$,使得

$$\mathrm{supp}(g_\alpha\varphi)\subset W_i,$$
$$\mathrm{supp}(g_\alpha\varphi)\subset\widetilde{W}_i.$$

取相应的局部坐标系$\{u_i\}$与$\{v_i\}$,使与 M 的定向相符. 于是

$$J=\left|\frac{\partial(v_1,\cdots,v_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}\right|>0.$$

令

$$g_\alpha\varphi=f\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m,$$
$$g_\alpha\varphi=\tilde{f}\,\mathrm{d}v_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}v_m.$$

则由

$$f\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m=g_\alpha\varphi=\tilde{f}\,\mathrm{d}v_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}v_m$$

得 $f=\tilde{f}\cdot J$,且因 $J>0$,我们有

$$\mathrm{supp}f=\mathrm{supp}\tilde{f}=\mathrm{supp}(g_\alpha\varphi)\subset W_i\cap\widetilde{W}_i.$$

由 Riemann 积分的变量代换公式推出

$$\int_{W_i\cap\widetilde{W}_i}\tilde{f}\,\mathrm{d}v_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}v_m=\int_{W_i\cap\widetilde{W}_i}\tilde{f}\,J\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m$$
$$=\int_{W_i\cap\widetilde{W}_i}f\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m. \tag{6.3}$$

这表明(6.2)式右边的积分与 W_i 的选择无关.

进而,由于支集 $\mathrm{supp}\varphi$ 为紧集,故它只与有限多个 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交,这蕴涵和式 $\varphi=\sum\limits_\alpha(g_\alpha\varphi)$ 只是一个有限和,从而

$$\int_M \varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \varphi \tag{6.4}$$

有意义. 还需证明(6.4)式与单位分解$\{g_\alpha\}$的选取无关. 事实上，取两个单位分解$\{g_\alpha\}$与$\{\widetilde{g}_\beta\}$，推演如下：

$$\begin{aligned}\sum_\beta \int_M \widetilde{g}_\beta \varphi &= \sum_\beta \int_M \widetilde{g}_\beta \left(\sum_\alpha g_\alpha \varphi \right) = \sum_\beta \sum_\alpha \int_M g_\alpha \widetilde{g}_\beta \varphi \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \int_M \widetilde{g}_\beta g_\alpha \varphi = \sum_\alpha \int_M \sum_\beta \widetilde{g}_\beta g_\alpha \varphi \\ &= \sum_\alpha \int_M g_\alpha \varphi.\end{aligned}$$

于是我们可以给出如下定义.

定义 6.4 设 M 为 m 维定向光滑流形. 若 $\varphi \in A(M)$，且 $\operatorname{supp}\varphi$ 为紧集，则称由(6.4)式定义的表示式 $\int_M \varphi$ 为 φ 在 M 上的积分.

由定义可知，具紧支集的 m 次外微分式的积分具有线性性质：

$$\int_M (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_M \varphi_1 + \int_M \varphi_2;$$

$$\int_M \alpha\varphi = \alpha \int_M \varphi .$$

可以看出，若 $\operatorname{supp}\varphi$ 只落在一个坐标域内，则 $\int_M \varphi$ 恰是普通的 Riemann 积分，所以这里定义的积分是 Riemann 积分的推广.

请读者思考一个问题，若 $\operatorname{supp}\varphi$ 非紧，但它可测，应当如何定义 $\int_M \varphi$ 呢?

其次定义 M 的 n 次外微分式 φ 的积分，这里 $n < m$.

仍设 $\operatorname{supp}\varphi$ 为紧集，设 N 为 M 的 n 维嵌入子流形，$h: N \to M$ 为 N 到 M 的一个嵌入映射，$h^*: T_q^* \to T_p^*$ 为 h 的微分(§2 定义 2.5)，而 $h^*\varphi$ 是 n 维子流形 N 上的 n 次外微分式，且具有紧支集，故

积分$\int_N h^* \varphi$有定义，我们就把φ在子流形$h(N)$上的积分定义为n次外微分式φ的积分.

定义 6.5 M的n次外微分式φ的积分，定义为它在n维子流形$h(N)$上的积分

$$\int_{h(N)} \varphi = \int_N h^* \varphi .$$

我们讨论流形M上的 Stokes 公式作为本章的结束. 为此引入M上的带边区域的概念.

定义 6.6 设M为m维光滑流形. 称M的子集D为M的带边区域，若D中包含两类点：(a) 内点，(b) 边界点.

边界点定义为：$p \in M$称为D的边界点，若存在p的坐标系(U, u_i)，使得$u_i(p) = 0$且$U \cap D = \{q \in U : u_m(q) \geqslant 0\}$. 这样的坐标系$(U, u_i)$称为边界点$p$的适用坐标系. 常称带边区域$D$的边界点$B$为$D$的边界.

定理 6.3 设M是m维光滑流形，D是边界为B的带边区域，则边界B是M的正则嵌入闭子流形. 若M是可定向的，则B也是可定向的.

证明可由定义与局部坐标系之间的关系推得. 请读者自行完成.

现在证明流形上的 Stokes 公式.

定理 6.4(Stokes 公式) 设D为m维定向光滑流形M中的带边区域，∂D为其边界. 若ω为M上的具紧支集的$m-1$次外微分式，则

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega. \tag{6.5}$$

若$\partial D = \varnothing$，则规定(6.5)式右边的积分为零.

证 取$\{U_i\}$为与M定向相符的坐标覆盖，$\{g_\alpha\}$为从属的单位分解. 利用

$$\omega = \sum_\alpha g_\alpha \omega$$

(注意，此分解式的右边只有有限多项)，就只需证明对每个 α 有

$$\int_D \mathrm{d}(g_\alpha \omega) = \int_{\partial D} g_\alpha \omega.$$

取局部坐标系 (U, u)，设

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} a_j \mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\mathrm{d}u_j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_m,$$

其中 a_j 是 U 上的光滑函数，而记号“—”表示 ω 中不含 $\mathrm{d}u_j$. 故

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \right) \mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_m. \tag{6.6}$$

不失一般性，设 $\operatorname{supp}\omega \subset U$. 考虑 $\partial D \cap U = \varnothing$ 与 $\partial D \cap U \neq \varnothing$ 两种情形：

情形一. 若 $\partial D \cap U = \varnothing$，则

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

故只需证(6.5)式左边为 0.

其实，当 $U \subset M - D$ 时，(6.5)式左边显然为 0. 当 $U \subset M$ 时，我们有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m,$$

上式第二个等号右边成为 Riemann 积分. 作 $\boldsymbol{R}^m$ 中的立方体

$$C = \{ |x| \leqslant K : 1 \leqslant i \leqslant m \},$$

使得 $U \subset C$. 把 a_j 连续可微地扩张到 C 上，定义：

$$\tilde{a}_j = \begin{cases} a_j, & \text{在 } U \text{ 上}, \\ 0, & \text{在 } C - U \text{ 上}. \end{cases} \tag{6.7}$$

故

$$\int_U \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m = \int_C \frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial u_j} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m$$

$$= \int_{|u_i| \leqslant K, i \neq j} \int_{-K}^{K} \left(\frac{\partial \tilde{a}_j}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j \right) \mathrm{d}u_1 \cdots \overline{\mathrm{d}u_j} \cdots \mathrm{d}u_m,$$

内层积分

$$\int_{-K}^{K}\frac{\partial\tilde{a}_j}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j=\tilde{a}_j(u_1,\cdots,u_{j-1},K,u_{j+1},\cdots,u_m)$$
$$-\tilde{a}_j(u_1,\cdots,u_{j-1},-K,u_{j+1},\cdots,u_m)$$
$$=0.$$

从而(6.5)式成立.

情形二. 若 $\partial D\cap U\neq\varnothing$,则

$$U\cap D=\{q\in U:u_m(q)\geqslant 0\},$$
$$U\cap\partial D=\{q\in U:u_m(q)=0\}.$$

取方体 $C=\{0\leqslant u_m\leqslant K,|u_i|\leqslant K:1\leqslant i\leqslant m-1,\}$,即 u_m 在上半空间. 显然当 K 充分大时,$U\cap D$ 落在 C 的内部与边界 $u_m=0$ 的并集内. 也如(6.6)式中那样延拓 a_j,并仍用 a_j 表示这个延拓,则

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{U\cap\partial D}\omega$$
$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{U\cap\partial D}a_j\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{j-1}\wedge\mathrm{d}u_{j+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m$$
$$=\int_{U\cap\partial D}a_1\mathrm{d}u_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m$$
$$-\int_{U\cap\partial D}a_2\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_3\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_m$$
$$+(-1)^{m-2}\int_{U\cap\partial D}a_{m-1}\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{m-2}\wedge\mathrm{d}u_m$$
$$+(-1)^{m-1}\int_{U\cap\partial D}a_m\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{m-1}$$
$$=(-1)^{m-1}\int_{U\cap\partial D}a_m\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{m-1}$$
$$=-\int_{|u_j|\leqslant K,1\leqslant i\leqslant m-1}a_m(u_1,\cdots,u_{m-1},0)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{m-1}.$$

另一方面,

$$\int_D d\omega = \int_{U\cap D} d\omega = \sum_{j=1}^{m}\int_{U\cap D}\frac{\partial a_j}{\partial u_j}du_1 \wedge \cdots \wedge du_m$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{m-1} + \sum_{j=m}^{m}.$$

同前理可推得 $\sum_{j=1}^{m-1} = 0$. 对于 $j = m$，有

$$\int_{U\cap D}\frac{\partial a_m}{\partial u_m}du_1 \wedge \cdots \wedge du_m$$

$$= \int_{|u_j|\leqslant K, i\neq m}[a_m(u_1,\cdots,u_{m-1},K) - a_m(u_1,\cdots,u_{m-1},0)]du_1\cdots du_{m-1}$$

$$= \int_{|u_j|\leqslant K, i\neq m} a_m(u_1,\cdots,u_{m-1},0)du_1\cdots du_{m-1}.$$

由此证得(6.5)式成立,Stokes 公式得证.

这个公式把经典微积分中的 4 个基本公式都包含作为特例.

例 6.1 牛顿-莱伯尼兹公式

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

例 6.2 Green 公式

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

例 6.3 Gauss 公式

$$\int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

例 6.4 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dzdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

习　　题

1. 试证：若流形 M 的坐标卡集 $\mathscr{A}'$ 满足定义 1.3 的条件(1)与(2)，则对任意正整数 s，$0<s\leqslant r$，存在唯一的 C^s 微分结构 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$.

2. 对 n 维 C^r 流形 $(M_1,\mathscr{A}_1)$ 与 m 维 C^r 流形 $(M_2,\mathscr{A}_2)$，定义积流形，并给出积流形的维数.

3. 试证 §1 的例 1.4 中，$\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 不同，即 $\mathscr{A}_1\neq\mathscr{A}_2$.

4. 试证：$M=\{(x,y):(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$ 作为 $\boldsymbol{R}^2$ 的子拓扑空间不是一维流形.

5. 设 $M(m,n)$ 为所有 $m\times n$ 实矩阵所成的空间. 看作与 $\boldsymbol{R}^{mn}$ 同构，$M(m,n)$ 是一个光滑流形. 设 $M(m,n;k)$ 是所有秩为 $k(0<k\leqslant\min(m,n))$ 的 $m\times n$ 实矩阵所成的空间. 赋于 $M(m,n)$ 在其上的诱导拓扑(子空间拓扑). 试证 $M(m,n;k)$ 为 $M(m,n)$ 的 $k(m+n-k)$ 维的光滑子流形.

6. 试证定理 2.3.

7. 试证：若 $D_1,D_2\subset\boldsymbol{R}^m$ 为两个同心开球，且 $\overline{D}_1\subset D_2$，则在 $\boldsymbol{R}^m$ 上存在光滑实函数 f，满足：

(1) $0\leqslant f\leqslant 1$，

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in D_1,\\ 0, & x\notin D_2;\end{cases}$

并举出一个这样的 f 的例.

8. 试证：若 U,V 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的两个非空开集，且 $\overline{V}$ 为紧集，$\overline{V}\subset U$，则存在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的光滑实函数 f，满足：

(1) $0\leqslant f\leqslant 1$，

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\notin U;\end{cases}$

并举出一个这样的 f 的例.

9. 试证：若 (U,φ_U) 为光滑流形 M 的任一个容许坐标卡，V

$\subset M$ 为非空开集，且 $\overline{V}$ 为紧集，$\overline{V}\subset U$. 则存在 M 上的光滑函数 $h: M\to \boldsymbol{R}^1$，使得：

(1) $0\leqslant h\leqslant 1$，

(2) $h(p)=\begin{cases}1, & p\in U,\\ 0, & p\notin U;\end{cases}$

也给出一个具体的 h，使其满足(1)和(2).

10. 试证定理 2.6、定理 2.7 与定理 2.9.

11. 试证定理 4.8、定理 4.11 与定理 4.12.

12. 用列表格的方式，给出张量丛与切丛、余切丛的关系.

13. 用列表格的方式，给出光滑截面与切矢量场、一次微分式的关系.

14. 用列表格的方式，给出外微分式的形成过程.

15. 试证：在定理 5.2 的条件下，对于开集 $U\subset M$，存在 $U_1\subset U$，及 M 上的函数 $\widetilde{\omega}$，使得

$$\widetilde{\omega}|_{U_1}=\omega|_{U_1}.$$

16. 设 $\boldsymbol{R}^2$ 为通常的二维 C^∞ 正定向流形，

$$M=\{(x,y): 1<x^2+y^2<4\},$$

$$\partial M=\{(x,y): x^2+y^2=1 \text{ 与 } x^2+y^2=4\}.$$

试用图形表示 M 的定向与 ∂M 的诱导定向.

17. 设 $\boldsymbol{R}^2$ 是通常的二维 C^∞ 正向流形，设

$$M=\{(x,y): x^2+y^2<1 \text{ 或 } 1<x^2+y^2<4\}.$$

试求 ∂M，并证明 ∂M 是 M 的 C^∞ 正则子流形.

18. 试证定理 5.4.

19. 设 $f: N\to M$ 是光滑流形 N 到 M 的光滑映射，试证由 f 诱导的映射 $f^*: A(N)\to A(M)$ 与外微分 d 是可交换的，即

$$f^*\circ \mathrm{d}=\mathrm{d}\circ f^*.$$

并给出交换图.

20. 试证流形上的积分关于积分区域也有可加性.

第三章 抽象测度

实变函数教程中详尽地讨论了 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，证明了许多重要性质.能否在更一般的空间中引进测度概念，当然是很有趣的问题，因为这不仅能更具体更深刻地从理论上去研究该空间的各种性质，而且有许多重要的应用.这里，作为 L-测度的一般化与推广，我们介绍抽象测度的基本知识.抽象测度概括了现代数学各个分支、计算机科学、现代物理学、天文学、气象学、地球科学等学科中所出现的各种具体测度的共同的和一般的特性，同时又以这种种的具体测度作为特例，因而，抽象测度理论就成为当今科学研究中不可缺少的工具.有广泛应用的正 Borel 测度、Radon 测度、复测度，以及 Haar 测度等也都将在本章中作较为详细的介绍.

§1 可测空间，测度空间，抽象测度的构造

本节设 X 为给定的基本集，不必具有代数结构.

定义 1.1 设 $\mathscr{R}$ 是基本集 X 的一些子集所成的集族，如果 $\mathscr{R}$ 满足：

(1) $A,B\in\mathscr{R}$ 蕴涵 $A\cup B\in\mathscr{R}$；

(2) $A,B\in\mathscr{R}$ 蕴涵 $A-B\in\mathscr{R}$，

则称 $\mathscr{R}$ 为集合的环，简称环.如果 $X\in\mathscr{R}$，则称环 $\mathscr{R}$ 为集合的代数，简称代数.

如果 $\mathscr{R}$ 满足：

(1′) $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{R}$ 蕴涵 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R}$；

(2′) 若 $A,B\in\mathscr{R}$ 蕴涵 $A-B\in\mathscr{R}$，

则称 $\mathscr{R}$ 为 σ 环. 如果 σ 环还满足 $X\in\mathscr{R}$,则称 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数.

由定义知环对有限次交的运算也是封闭的,而 σ 环对可列交运算也封闭.

例 1.1 取 $X=[0,1]$,$\mathscr{R}=\{E\subset[0,1]:E$ 为 Lebesgue 可测集$\}$.

由 Lebesgue 测度的基本知识,$\mathscr{R}$ 是环,且为 σ 环;也是代数,并为 σ 代数.

例 1.2 设 X 为任一基本集,令 $\mathscr{P}(X)=\{A\subset X:A$ 为 X 的子集$\}$.

易证 $\mathscr{P}(X)$是环,且为 σ 环;也是代数,并为 σ 代数.

例 1.3 $X=(-\infty,\infty)$,$\mathscr{E}=\{[\alpha,\beta):-\infty<\alpha<\beta<\infty\}$.

由两个半开区间作并、交运算,未必仍是半开区间,故 $\mathscr{E}$ 不是环.

定义 1.2 设 $\mathscr{E}$ 是基本集的一些子集所成的集族. 我们称包含 $\mathscr{E}$ 的一切环的交为由 $\mathscr{E}$ 产生的环,记为 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$. 又称包含 $\mathscr{E}$ 的一切 σ 环的交为由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环,记为 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$. 由 $\mathscr{E}$ 产生的代数与 σ 代数可同样定义.

例 1.4 利用例 3 中的集族 $\mathscr{E}=\{[\alpha,\beta):-\infty<\alpha<\beta<\infty\}$,可求得

$$\mathscr{R}(\mathscr{E})=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j):\alpha_j,\beta_j\in(-\infty,\infty),n\in N\right\}.$$

由 $\mathscr{E}$ 产生的环与 σ 环有如下结构.

定理 1.1 由 $\mathscr{E}$ 产生的环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$中的每个元都含于 $\mathscr{E}$ 的有限个元的并中,而由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$中的元都含于 $\mathscr{E}$ 的可列多个元的并中.

证 这里仅证后一部分;前半部分可类似证得. 考虑集族

$$\mathscr{S}=\left\{A\subset X:\text{存在 } E_j\in\mathscr{E},j=1,2,\cdots,\text{使得 } A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right\},$$

显然,$\mathscr{E}\subset\mathscr{S}$. 现在证明 $\mathscr{S}$ 是一个 σ 环.

事实上，任取 $A_k\in\mathscr{S}$，$k=1,2,\cdots$，由 $\mathscr{S}$ 的定义，存在 $E_j^k\in\mathscr{E}$，$j=1,2,\cdots$，使

$$A_k\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j^k.$$

从而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j^k.$$

注意到 $\mathscr{S}$ 中两个元的差显然仍在 $\mathscr{S}$ 中，于是 $\mathscr{S}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的 σ 环，故 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subset\mathscr{S}$. 这就是要证明的.

为进一步讨论 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$的结构，我们引进单调类的概念.

定义 1.3 设 $\mathscr{M}$ 为基本集 X 的子集所成的集族. 若 $\mathscr{M}$ 中的渐张集列的并与渐缩集列的交都属于 $\mathscr{M}$，则称 $\mathscr{M}$ 为一个单调类. 包含集族 $\mathscr{E}$ 的一切单调类的交称为由 $\mathscr{E}$ 产生的单调类，记为 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$.

据定义知 σ 环是一个单调类. 此外，任一个环 $\mathscr{R}$ 若同时是单调类，则它也是一个 σ 环(习题 5).

定理 1.2 设 $\mathscr{E}$ 是 X 的子集所成的环(或代数)，则由 $\mathscr{E}$ 产生的单调类与由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环(或 σ 代数)相同，即

$$\mathscr{M}(\mathscr{E})=\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}).$$

证 因 σ 环必为单调类，故作为包含 $\mathscr{E}$ 的单调类，有 $\mathscr{M}(\mathscr{E})\subset\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$. 下面证明相反的包含关系. 为此也只需证明 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$是一个 σ 环.

对集 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{E})$，作一个集族

$$K(A)=\{B\in\mathscr{M}(\mathscr{E}):A-B,B-A,A\cup B\in\mathscr{M}(\mathscr{E})\}.$$

易见 $B\in K(A)$蕴涵 $A\in K(B)$. 进而，$K(A)$是一个单调类. 例如，在 $K(A)$中取一渐张列 B_n，$B_n\subset B_{n+1}$，并令

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

则对 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{E})$，

$$A - B_n, \quad B_n - A, \quad A \cup B_n$$

分别为渐缩、涨张和渐张集列，故它们都属于 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$. 又因 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为单调类，故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A - B_n), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n - A), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cup B_n)$$

也都属于 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$. 然而它们正是 $A-B, B-A$ 与 $A \cup B$. 从而 $K(A)$是单调类. 于是对于集 $A \in \mathscr{E}$，注意到 $\mathscr{E} \subset K(A)$，也注意到任一个含 $\mathscr{E}$ 的单调类必包含 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$，便得

$$\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset K(A).$$

当 $A \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$时，我们也能证明 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset K(A)$. 事实上，对任意的 $C \in \mathscr{E}$，由上面的证明知 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset K(C)$；因此 $A \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$ 蕴涵 $A \in K(C)$，从而 $C \in K(A)$. 这表明 $\mathscr{E} \subset K(A)$对任何 $A \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$都成立，于是 $\mathscr{M}(\mathscr{E}) \subset K(A)$.

现在可以证明 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$是 σ 环了. 任取 $A, B \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$，知 $B \in K(A)$，从而由$K(A)$的定义得 $A-B, B-A, A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 这表明 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$是一个环. 但它同时也是单调类，因而必是 σ 环，故 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{E})$. 定理得证.

下面给出可测空间的定义.

定义 1.4 设 X 为基本集，$\mathscr{R}_\sigma$ 为 X 的某些子集所成的 σ 环. 若

$$X = \bigcup_{A \in \mathscr{R}_\sigma} A,$$

则称$(X, \mathscr{R}_\sigma)$为一个可测空间. 而称 $\mathscr{R}_\sigma$ 中的集为关于 $\mathscr{R}_\sigma$ 的可测集，简称可测集.

若定义在基本集 X 上的实值函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 满足下述条件：对任意 $\alpha \in \mathbf{R}$，集 $A = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$是可测集，即 $A \in \mathscr{R}_\sigma$，则称 f 为可测空间$(X, \mathscr{R}_\sigma)$上的可测函数.

注意到关于 $\mathscr{R}_\sigma$ 的可测集至今尚未给出任何度量，例如"长度"、"面积"或"体积"等，因此在可测空间中尽管可以讨论可测集、

可测函数以及它们的某些性质，例如，我们可以讨论可测函数的和、差、积、商（分母不为零）及可测函数列的按点极限等，但却有一定的局限性. 如果对可测空间中的可测集引进测度，情况就大不相同了.

定义 1.5 设 X 为基本集，$\mathscr{P}$ 为 X 的某些子集所成的集族. 我们称定义在 $\mathscr{P}$ 上取值于广义实直线 $\overline{\boldsymbol{R}}=[-\infty,\infty]$ 的广义实函数 μ 为 $\mathscr{P}$ 上的广义集函数；对 $E\in\mathscr{P}$，记此集函数为 μE. 若 μ 取值于 $[0,+\infty]$，则称 μ 为非负集函数. 若对 $\mathscr{P}$ 中两两互斥（两两互不相交）的任意集列 $E_n, n=1,2,\cdots$，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{P},$$

并有下式成立

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n,$$

则称 μ 为 $\mathscr{P}$ 上的 σ 可加集函数，或称完全可加集函数.

定义 1.6 设 $\mathscr{R}_\sigma$ 为基本集 X 上的 σ 环，μ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的非负集函数. 若 μ 满足

(1) $\mu\varnothing=0$；

(2) μ 是 σ 可加的，

则称 μ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的测度.

若 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为一可测空间，μ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 的测度，则称 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为测度空间. $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 称为 μ 可测集（简称可测集），μE 称为 E 的测度. 若 $\mu X<+\infty$，就称 μ 为有限测度. 若存在 $\mathscr{R}_\sigma$ 中的集列 $E_n, n=1,2,\cdots$，使得 $\mu E_n<+\infty$，且

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

则称 μ 为 σ 有限测度. 若 $\mathscr{R}_\sigma$ 包含零测度集的所有子集，则称 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为完全测度空间.

例 1.5 设 $X=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$\mathscr{R}_\sigma$ 是 X 的一切子

集所成的集族. 对任一个 $E\in\mathscr{R}_\sigma$,我们定义集函数 μ:

$$\mu E=\begin{cases}n, & \text{若 } E \text{ 中的元的个数为 } n,\\ +\infty, & \text{若 } E \text{ 为无限集},\\ 0, & \text{若 } E=\varnothing.\end{cases}$$

易见 μ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的测度,而 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为一测度空间.

例 1.6 设 $X=\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$,$\mathscr{R}_\sigma$ 为 X 中 Lebesgue 可测集的全体所成的集族,取 $\mu=m$ 为 Lebesgue 测度,则 $(X,\mathscr{R}_\sigma,m)$ 就成为一个测度空间.

例 1.7 设 X 为基本集,$\mathscr{A}$ 为 X 的子集所成的 σ 代数,则 $(X,\mathscr{A})$ 是一个可测空间. 对任一个 $A\in\mathscr{A}$,定义

$$\delta_x A=\begin{cases}0, & \text{若 } x\notin A,\\ 1, & \text{若 } x\in A.\end{cases}$$

则 δ_x 是 $\mathscr{A}$ 上的测度,我们称 $\delta_x A$ 为 A 在 x 点的 Dirac 测度. 从而 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\delta_x)$ 是一个测度空间.

例 1.8 设 X 为基本集,$(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为可测空间,对每个 $E\in\mathscr{R}_\sigma$,定义

$$\mu A=\begin{cases}A \text{ 的势}, & \text{若 } A \text{ 的势} < \aleph_0,\\ \infty, & \text{若 } A \text{ 的势} \geqslant \aleph_0.\end{cases}$$

则 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 成为一个测度空间,μ 称为其上的计数测度.

下面的定理给出测度的基本性质.

定理 1.3 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为测度空间,我们有

(1) 若 $A,B\in\mathscr{R}_\sigma$,且 $A\subset B$,则 $\mu A\leqslant\mu B$,

(2) 若 $A_n\in\mathscr{R}_\sigma$,$n=1,2,\cdots$,则

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big)\leqslant\sum_n \mu A_n,$$

(3) 若 $\{A_n: n=1,2,\cdots\}$ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 中的渐张集列,则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu A_n;$$

若 $\{A_n: n=1,2,\cdots\}$ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 中的渐缩集列,且 $\mu A_1<+\infty$,则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu A_n.$$

证 (1) 由 $A\subset B$ 得 $B=A\cup(B-A)$. 据测度的非负性和 σ 可加性得

$$\mu A\leqslant\mu A+\mu(B-A)=\mu B.$$

(2) 对于 $A_n\in\mathscr{R}_\mu, n=1,2,\cdots$,我们令

$$B_1=A_1,\quad B_2=A_2-A_1,\quad \cdots,$$
$$B_j=A_j-A_1-A_2-\cdots-A_{j-1},$$

则 B_j 两两互斥,且

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j.$$

由测度的 σ 可加性及 $B_j\subset A_j$,得

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right)=\mu\left(\bigcup_j B_j\right)=\sum_j\mu B_j\leqslant\sum_j\mu A_j.$$

(3) 若 $\{A_n:\ n=1,2,\cdots\}$ 为渐张集列. 令 $A_0=\varnothing$,则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n-A_{n-1}\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n-A_{n-1})=\lim_{k\to\infty}\mu\left(\sum_{n=1}^{k}(A_n-A_{n-1})\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\mu A_k.$$

若 $\{A_n:\ n=1,2,\cdots\}$ 为渐缩列,且 $\mu A_1<+\infty$,则

$$A_1=\left(A_1-\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$
$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1-A_n)\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

由于 A_1-A_n 为渐张列,利用(3)中关于渐张列的结果得

$$\mu A_1=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1-A_n)\right)+\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$
$$=\lim_n\mu(A_1-A_n)+\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

$$= \lim_n(\mu A_1 - \mu A_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \mu A_1 - \lim_n(\mu A_n) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

由假设条件 $\mu A_1 < +\infty$，从上式便得到

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu A_n.$$

即(3)得证. 定理得证.

在一个测度空间中，由于引进了测度，我们可以研究可测函数、抽象积分等一系列平行于 Lebesgue 测度与积分理论的问题. 因为 Lebesgue 测度与积分在实变函数教程中已有详细的讨论，故对抽象测度我们仅将主要的一些结果罗列于下，叙而不证，读者可参看实变函数教程中的相应处理.

定义 1.7 设$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$为测度空间. X 上的实值函数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ 称为 μ 可测的，若对任意 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，集 $E = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{R}_\sigma$，亦即对任何 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，集合 $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ 为 μ 可测集. X 上的复值函数 $f: X \to \boldsymbol{C}$ 称为 μ 可测的，若它的实部 $\mathrm{Re}f$ 与虚部 $\mathrm{Im}f$ 都是 μ 可测的.

关于测度空间$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$上的可测函数，我们有如下性质(若无特别说明，以下均考虑$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$为完全测度空间)：

(1) 若 f, g 为 μ 可测函数，则关于线性运算 $af + bg$，乘积 fg，商 $f/g\,(g \neq 0)$，最大值 $\max(f, g)$，最小值 $\min(f, g)$，幂 $|f|^\alpha$ $(\alpha > 0)$，正部 f^+ 与负部 f^- 等都是 μ 可测函数.

(2) 若 $f_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ 为 μ 可测函数列，则 $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim_n} f_n$, $\underline{\lim_n} f_n$ 等都是 μ 可测函数. 又若极限 $\lim_n f_n$ 存在，则它也是 μ 可测的.

(3) μ 可测集 E 的特征函数与定义在 E 上的简单函数都是 μ 可测的.

(4) 若 f 为 X 上的非负 μ 可测函数，则存在非负递增的简单函数列 f_n，使得 $\lim\limits_n f_n(x) = f(x), x \in X$.

定义 1.8 设$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$为测度空间. 命题 $P(x)$称为在集 $A \subset X$ 上 μ 几乎处处成立，若存在 μ 可测集 $E \in \mathscr{R}_\sigma$ 且 $E \subset A$，$\mu E = 0$，而使 $P(x)$对一切 $x \in A - E$ 成立，记为 $P(x)$，μ-a. e..

定义 1.9 设 $f_n(n=1,2,\cdots)$与 f 都是定义在测度空间$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$上的 μ 可测函数. 若对任意的 $\delta > 0$，存在 μ 可测集 $F \in \mathscr{R}_\sigma$，且 $\mu F < \delta$，使得 $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ 在 $x \in X - F$ 上一致成立，则称 f_n 近一致收敛于 f. 若对任意的 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_n \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

则称 f_n 测度收敛于 f.

在 Lebesgue 测度理论中著名的 Egorov 定理成为如下形式.

定理 1.4 设$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$为有限测度空间. $f, f_n(n=1,2,\cdots)$为定义在 X 上的 μ 可测函数，且在 X 上有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad \mu\text{-a. e.},$$

则对任给的 $\delta > 0$，存在 μ 可测集 $F \in \mathscr{R}_\sigma$，使 $\mu F < \delta$，而且 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ 在 $X - F$ 上一致成立.

关于测度收敛，也有唯一性定理和四则运算公式等结果. 并且也成立 Riesz 定理，它给出了测度收敛与 μ 几乎处处收敛的关系.

更一般地，可考虑映射的 μ 可测性. 例如，设$(X, \mathscr{R}_\sigma, \mu)$为测度空间，$Y$ 为一拓扑空间. 我们称映射 $f: X \to Y$ 为 μ 可测的，若对 Y 中任一个开集 G，$f^{-1}(G)$都是 μ 可测集，即 $f^{-1}(G) \in \mathscr{R}_\sigma$. 其详细内容在此就不再多叙述了.

下面介绍抽象测度的构造.

若在基本集 X 的某个子集族 $\mathscr{E}$ 上给定一个测度 μ($\mathscr{E}$ 上可加的非负集函数)，不难把 μ 扩充到由 $\mathscr{E}$ 产生的环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$上，因为 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$中的元实际上是 $\mathscr{E}$ 中元的有限并. 因此这里我们可从基本集 X 的一个环出发，设 $\mathscr{E}$ 为 X 的子集所成的环，μ 是环 $\mathscr{E}$ 上给定

的测度. 现在要讨论的问题是能否把它扩大到由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$上去，而使得$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$成为一个测度空间? 又在什么条件下这种扩张是唯一的? 下面来讨论这个问题.

定义 1.10 设 $\mathscr{R}_\sigma$ 为基本集 X 的子集所生成的 σ 环. λ^* 是定义在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的非负集函数，若它满足：

(1) $\lambda^*\varnothing = 0$,

(2) $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^* A_n,\ A_n \in \mathscr{R}_\sigma, n = 1,2,\cdots,$

(3) 如果 $A_1,A_2 \in \mathscr{R}_\sigma$,并且 $A_1 \subseteq A_2$,即有 $\lambda^* A_1 \leqslant \lambda^* A_2$,

则称 λ^* 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度.

由定理 1.1 的证明,集族

$$\mathscr{S} = \left\{A \subseteq X:\ 存在\ E \in \mathscr{E}, j = 1,2,\cdots,使\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right\}$$

为包含 $\mathscr{E}$ 的 σ 环,设 μ 为 $\mathscr{E}$ 上的测度. 现在对每个 $A\in\mathscr{S}$,令

$$\lambda^* A = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu E_j:\ A \subseteq \bigcup_j E_j, E_j \in \mathscr{E}\right\}. \qquad (1.1)$$

我们有：

定理 1.5 由(1.1)定义的 λ^* 是 σ 环 $\mathscr{S}$ 上的外测度,称之为由 μ 导出的外测度. 当 $A\in\mathscr{E}$ 时,$\lambda^* A=\mu A$.

证 我们证明 λ^* 为满足定义 1.10 的(1)～(3)的非负集函数. $\lambda^* A\geqslant 0$ 由定义即得. λ^* 满足(1)是显然的,这是因为 $\mu\varnothing=0$. 现在证明 λ^* 满足(2).

取集列 $A_n\in\mathscr{S},n=1,2,\cdots$. 若存在 n_0,使 $\lambda^* A_{n_0}=+\infty$,则

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^* A_n,$$

故(2)成立. 若对一切 $n\in N$,都有 $\lambda^* A_n<+\infty$. 则任给 $\delta>0$,对每个 $A_n\in\mathscr{S}$,可取 $E_j^{(n)}\in\mathscr{E}$,使得

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}E_j^{(n)},\quad 且\sum_{j=1}^{\infty}\mu E_j^{(n)} < \lambda^* A_n + \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

显然，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(n)},$$

且有

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n,j=1}^{\infty} \mu E_j^{(n)} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^* A_n + \frac{\delta}{2^{n+1}}\right)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* A_n + \delta.$$

由 δ 的任意性便得(2).

至于(3)，设 $A_1 \subseteq A_2, A_1, A_2 \in \mathscr{S}$. 注意到若

$$A_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,$$

则必有 $A_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，再由 $\lambda^* A$ 的定义便可得到(3)了.

最后证明，若 $A \in \mathscr{E}$，则 $\lambda^* A = \mu A$. 事实上，取 $E = A$，得到 $\lambda^* A \leqslant \mu A$. 另一方面，取 $E_j \in \mathscr{E}, j=1,2,\cdots$，使得

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

令

$$B_n = E_n - E_1 - \cdots - E_{n-1}, \quad n = 2,3,4,\cdots,$$

而 $B_1 = E_1$，则 B_n 互斥，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 据

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right),$$

并据 μ 在 $\mathscr{E}$ 上的完全可加性与单调性，得

$$\mu A = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

取下确界，有

$$\mu A \leqslant \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n = \lambda^* A.$$

联合 $\lambda^* A \leqslant \mu A$ 便得 $\lambda^* A = \lambda A$ 对 $A \in \mathscr{E}$ 成立. 定理得证.

一般来说,由 μ 导出的 $\mathscr{S}$ 上的外测度并非 $\mathscr{S}$ 上的测度. 此时我们用如下的 Carathéodory 条件来定义 $\mathscr{S}$ 中的可测集及它们的测度.

定义 1.11 设 λ^* 为 σ 环 $\mathscr{S}$ 上的外测度. 所谓集 $A \in \mathscr{S}$ 关于 λ^* 满足 Carathéodory 条件,是指: 若对一切 $E \in \mathscr{S}$,有

$$\lambda^* E = \lambda^* (E - A) + \lambda^* (E \cap A). \tag{1.2}$$

记 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{S}$ 中关于 λ^* 满足 Carathéodory 条件的集的全体. 关于 $\mathscr{A}$ 及 λ^*,有下面的 Carathéodory 定理.

定理 1.6 由上面所确定的 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 环,并且有

(1) 对任意 $E \in \mathscr{S}, A_n \in \mathscr{A}, n = 1, 2, \cdots, A_n$ 互斥,则

$$\lambda^* \left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* (E \cap A_n), \tag{1.3}$$

(2) λ^* 限制在 $\mathscr{A}$ 上是一个完全测度;称之为由外测度 λ^* 导出的测度,记为 λ.

证 先来证明 $\mathscr{A}$ 是一个环,且 λ^* 在 $\mathscr{A}$ 上有有限可加性.

改写(1.2)式成如下的对称形式

$$\lambda^* E = \lambda^* (E \cap \mathscr{C}A) + \lambda^* (E \cap A), \tag{1.4}$$

这里 $\mathscr{C}A = X - A$. 由(1.4)式知,若 $A \in \mathscr{A}$,则 $\mathscr{C}A \in \mathscr{A}$. 其次,对 $A, B \in \mathscr{A}$,以及对 $E \in \mathscr{S}$,我们有

$$\begin{aligned} \lambda^* E &= \lambda^* (E \cap \mathscr{C}A) + \lambda^* (E \cap A) \\ &= \lambda^* ((E \cap \mathscr{C}A) \cap \mathscr{C}B) + \lambda^* ((E \cap \mathscr{C}A) \cap B) \\ &\quad + \lambda^* ((E \cap A) \cap \mathscr{C}B) + \lambda^* ((E \cap A) \cap B). \end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.5)式右端第二、三、四项之和 $\geqslant \lambda^* (E \cap (A \cup B))$,从而得到

$$\lambda^* E \geqslant \lambda^* (E \cap \mathscr{C}(A \cup B)) + \lambda^* (E \cap (A \cup B)),$$

这表明 $A \cup B \in \mathscr{A}$. 另一方面, $A, B \in \mathscr{A}$ 蕴涵 $\mathscr{C}A, \mathscr{C}B \in \mathscr{A}$,于是得到

$$A \cap B = \mathscr{C}(\mathscr{C}A \cup \mathscr{C}B) \in \mathscr{A}.$$

故 $\mathscr{A}$ 是一个环，并且对于 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \cap B = \varnothing$，我们有

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*((A \cup B) \cap A) + \lambda^*((A \cup B) \cap \mathscr{C}A)$$
$$= \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

因此 λ^* 在 $\mathscr{A}$ 上有限可加性成立.

进而证明，$\mathscr{A}$ 是一个 σ 环. 事实上，任取 $A_n \in \mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$，不妨设 A_n 两两互斥. 令

$$B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \quad B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

则对任意 $E \in \mathscr{S}$，有

$$\lambda^*(E \cap B_n) = \lambda^*(E \cap B_n \cap A_n) + \lambda^*(E \cap B_n \cap \mathscr{C}A_n)$$
$$= \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*(E \cap B_{n-1}),$$

由归纳法得

$$\lambda^*(E \cap B_n)$$
$$= \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*(E \cap A_{n-1}) + \cdots + \lambda^*(E \cap A_1)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(E \cap A_j).$$

因此

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap B_n) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}B_n)$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(E \cap A_j) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}B).$$

令 $n \to \infty$，得

$$\lambda^*(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_j) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}B)$$
$$\geqslant \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E \cap A_j)\right) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}B)$$
$$= \lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}B), \tag{1.6}$$

故 $B \in \mathscr{A}$. 因此 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 环.

在上式中取 $E = B$，得

$$\lambda^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \cap \mathscr{C}B) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^* A_j.$$

所以 λ^* 在 $\mathscr{A}$ 上完全可加性成立. 关于(1.3)式, 可由 $E\cap B$ 代替(1.6)式中的 E 得到.

最后我们来证明 λ^* 是 $\mathscr{A}$ 上的完全测度. 为此, 取 $A\in\mathscr{S}$, 满足 $\lambda^*(A)=0$. 则对任意 $E\in\mathscr{S}$, 有

$$\begin{aligned}\lambda^* E &\leqslant \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}A)\\ &\leqslant \lambda^* A + \lambda^*(E \cap \mathscr{C}A) \leqslant 0 + \lambda^* E.\end{aligned}$$

因此 $\lambda^* E=\lambda^*(E\cap A)+\lambda^*(E\cap\mathscr{C}A)$. 故 $A\in\mathscr{A}$, 这样, 对于 $\lambda^* A=0$ 的一切 A, 它的子集 $B\subseteq A$ 也有 $B\in\mathscr{A}$. 定理得证.

定义 1.12 设 μ 为 X 的子集所成的环 $\mathscr{E}$ 上的测度, $\mathscr{R}_\sigma$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的一个 σ 环. 若存在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的测度 λ, 使对每个 $A\in\mathscr{E}$ 有 $\lambda A=\mu A$, 则称 λ 为 μ 到 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的一个扩张.

按上述定义, Carathéodory 定理可叙述为: 若 μ 为环 $\mathscr{E}$ 上的测度, 则按(1.1)式定义的 λ^* 是由 μ 导出的 $\mathscr{S}$ 上的外测度, 而按(1.2)式定义的 $\mathscr{A}$ 上的测度 $\lambda(=\lambda^*)$ 便是 μ 到 σ 环 $\mathscr{A}$ 上的一个扩张, 并且由于 $\mathscr{A}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的 σ 环, 因此由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subseteq\mathscr{A}$. 这表明环 $\mathscr{E}$ 上的测度必定能扩张到由它到产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上. 自然要问, 这种扩张是否唯一? 在测度为 σ 有限时, 回答是肯定的. 我们有

定理 1.7 环 $\mathscr{E}$ 上的 σ 有限测度到 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的扩张是唯一的.

证 首先, 考虑 $\mathscr{E}$ 上的有限测度 μ 的情形. 设 μ_1 与 μ_2 为 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的扩张, 且对 $E\in\mathscr{E}$ 有 $\mu_1 E=\mu_2 E=\mu E$.

令 $\mathscr{B}=\{A\in\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}) : \mu_1 A=\mu_2 A\}$. 显然

$$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{B}\subseteq\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}).$$

为此只需证明包含关系 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subseteq\mathscr{B}$, 也只需证明 $\mathscr{B}$ 是一个单调类, 但这不难由 μ 为有限测度与定理 1.3 得到.

其次, 考察 μ 为 σ 有限的情形. 由定义, 对任意 $A\in\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$, 存

在 $\mathscr{E}$ 中集列 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$，使

$$\mu E_n < +\infty,\ n = 1,2,\cdots, \quad \text{且 } A \subseteq X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

不失一般性，设上述 E_n 为渐张的，于是

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n), \quad \text{且 } A \cap E_n$$

为渐张的. 故

$$\mu_1 A = \lim_n \mu_1 (A \cap E_n), \quad \mu_2 A = \lim_n \mu_2 (A \cap E_n). \tag{1.7}$$

另一方面，对每个 n，由测度的单调性知

$$\mu_j (A \cap E_n) \leqslant \mu_j E_n = \mu E_n < +\infty, \quad j = 1,2.$$

因此，视 $\mu_{jn} A \equiv \mu_j (A \cap E_n)(j=1,2;\ n=1,2,\cdots)$ 为 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的有限测度，显然也是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度. 故利用前半部分的结论知，对 $A \in \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$，我们有 $\mu_{1n} A = \mu_{2n} A, n=1,2,\cdots$. 据(1.7)式便得 $\mu_1 A = \mu_2 A$. 定理得证.

下面举一些例.

例 1.9 Lebesgue 测度.

大家在实变函数教程中熟知的、采用内外测度的方式定义的 Lebesgue 测度，也可以作为抽象测度的特例而得到. 事实上，取基本集 $X = \boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$，$\mathscr{E}$ 为由 X 中一切有限多个半闭区间的并所产生的环，即环 $\mathscr{E}$ 为

$$\left\{ \bigcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j) : -\infty < \alpha_j < \beta_j < +\infty, [\alpha_j, \beta_j) \text{ 互斥}, \right.$$
$$\left. 1 \leqslant j \leqslant n, n \in \boldsymbol{N} \right\}.$$

在 $\mathscr{E}$ 上定义集函数 m，使 $E = \bigcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j)$ 有

$$mE = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j),$$

它是 $\mathscr{E}$ 上的测度，并且是 σ 有限的. 按照(1.1)式首先得到 m 在 $\mathscr{S}$ 上的导出外测度 m^*（不难看出，它等价于 Lebesgue 积分理论

中集合的外测度). 再由(1.2)式定义 m^* 可测集的全体 $\mathscr{A}$,就是 Lebesgue 可测集类,而 m^* 在 $\mathscr{A}$ 上的限制就是 Lebesgue 测度. 我们把这个结论的证明留给读者.

例 1.10 n 维 Lebesgue 测度.

只需取 $\mathscr{E}$ 为 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的半闭方间所产生的环,仿例 1.9 的步骤便得 n 维 Lebesgue 测度.

例 1.11 Lebesgue-Stieltjes 测度.

设 $X=\boldsymbol{R}^1$,$\mu(x)$为 $\boldsymbol{R}^1$ 上定义的增函数,且为右连续. 取例 1.9 中的环 $\mathscr{E}$,并规定

$$[\alpha,\alpha) \equiv [\alpha,\alpha] = \{\alpha\} \in \mathscr{E}, \quad \alpha \in (-\infty,\infty).$$

在 $\mathscr{E}$ 上定义集函数 m 如下:

若 $E=[\alpha,\beta)$,则 $mE=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha-0)$;

若 $E=[\alpha,\alpha)$,则 $mE=\mu(\alpha)-\mu(\alpha-0)$;

若 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j)$,$[\alpha_j,\beta_j)$ 互斥,则

$$mE=\sum_{j=1}^{n}m[\alpha_j,\beta_j)=\sum_{j=1}^{n}\{\mu(\beta_j-0)-\mu(\alpha_j-0)\}.$$

请读者注意,在这个例子中,单点集$\{\alpha\}=[\alpha,\alpha)$的测度未必为 0,这与 Lebesgue 测度不同. 不难验证,m 是 $\mathscr{E}$ 上的 σ 有限测度. 按上述方式定义而得到的 $\mathscr{A}$ 上的测度 m(作为 $\mathscr{E}$ 上测度 m 到 $\mathscr{A}$ 上的扩张)称为 Lebesgue-Stieltjes 测度. 而当 $\mu(x)=x$ 时,又回到 Lebesgue 测度.

当我们从基本集 X 的一个环 $\mathscr{E}$ 上的测度 μ 出发,按照以上的思路,便构造了一个测度空间$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$. 这样,类似于 Lebesgue 积分理论,可在$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$上建立抽象积分理论.

定义 1.13 设$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间,$f:X\to\boldsymbol{C}$ 为 X 上的复值 μ 可测函数. 我们定义 f 在 X 上关于测度 μ 的积分,记为 $\int_X f\mathrm{d}\mu$, 其定义如下:

(1) 若 f 为简单函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{e_k}(x),$$

这里 $e_k=\{x\in X: f(x)=c_k\}$，e_k 互斥，且 $\mu e_k<+\infty$，χ_{e_k} 为 e_k 的特征函数，$1\leqslant k\leqslant n$，则 f 在 X 上的积分定义为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{n}c_k\mu e_k. \tag{1.8}$$

(2) 若 f 为 X 上的非负可测函数，则 f 在 X 上的积分定义为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup_{\varphi\in\Phi}\int_X\varphi\mathrm{d}\mu, \tag{1.9}$$

这里 $\Phi=\{\varphi:\varphi$ 是 X 上满足 $0\leqslant\varphi\leqslant f$ 的简单函数$\}$. 若

$$\int_X f\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

则称 f 为 X 上的可积函数. 我们记 X 上非负可积函数的全体所生成的集为 $L^+(X,\mu)$，或简记为 $L^+(\mu)$.

(3) 若 f 为 X 上的实值 μ 可测函数，令 $f=f^+-f^-$，并设积分

$$\int_X f^+\mathrm{d}\mu \quad 与 \quad \int_X f^-\mathrm{d}\mu$$

中至少有一个为有限的，则 f 在 X 上的积分定义为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\mathrm{d}\mu. \tag{1.10}$$

若

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right|<+\infty,$$

则称 f 为 X 上的可积函数. 我们记 X 上实值可积函数的全体所构成的集为 $L_R(X,\mu)$，或简记为 $L_R(\mu)$. 由于 $f^\pm\leqslant|f|\leqslant f^++f^-$，故 $f\in L_R(\mu)$当且仅当 $|f|\in L_R(\mu)$.

(4) 若 f 为 X 上的复值 μ 可测函数，令 $f=\mathrm{Re}f+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}f$，并且假设 $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f\in L_R(\mu)$，则称 f 在 X 上为可积函数，它的积分

定义为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}f\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_X \mathrm{Im}f\mathrm{d}\mu. \tag{1.11}$$

我们记 X 上复值可积函数的全体所生成的集为 $L(X,\mu)$，或简记为 $L(\mu)$.

易知 $L(\mu)$ 为复线性空间，而 $L_{\mathbf{R}}(\mu)$ 为实线性空间，且 $L_{\mathbf{R}}(\mu)\subseteq L(\mu)$.

(5) f 在 X 的可测子集 E 上的积分定义为

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu. \tag{1.12}$$

Lebesgue 积分的许多性质，如绝对连续性，关于区域的 σ 可加性、线性、单调性、唯一性，以及积分的单调收敛定理、控制收敛定理等都可以在抽象积分的意义下得到证明. 在此我们叙述其中的一部分，请读者自行证明.

定理 1.8 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^+(\mu)$，且 $f_n\leqslant f_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.9 若 $\{f_n\}$ 为 $L^+(\mu)$ 中的有限或无限序列，且 $f=\sum\limits_n f_n$，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_n\int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.10 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L^+(\mu)$，则

$$\int_X(\underline{\lim} f_n)\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim}\int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.11 若 $f\in L(\mu)$，则

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.12 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L(\mu)$ 满足：

(1) $f_n\to f$, a.e.,

(2) 存在非负可积函数 $g\in L^+(\mu)$，使 $|f_n|\leqslant g, n=1,2,\cdots$.
则 $f\in L(\mu)$ 且

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

$L(\mu)$ 中的强收敛 $\left(\|f_n - f\|_{L(\mu)} = \int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu \to 0\right)$、几乎处处收敛，以及测度收敛等关系，也与 Lebesgue 积分情况类似，不再详述了.

现在来讨论乘积测度. 大家知道，它是建立具有广泛应用的 Fubini 定理基础. 此外，这类测度的构造技巧也很有代表性.

设 $(X,\mathscr{M},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{N},\nu)$ 为两个测度空间. 这里我们假设 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{N}$ 分别为 X 与 Y 中的 σ 代数.

定理 1.13 设 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{F}$ 分别为 X 与 Y 的子集所生成的环，形如 $A\times B(A\in\mathscr{E}, B\in\mathscr{F})$ 的集称为积集 $X\times Y$ 中的矩形，令 $\mathscr{G}$ 为 $X\times Y$ 中一切互不相交的矩形的有限并所生成的集，即

$$\mathscr{G} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n}(A_j\times B_j) : A_j\in\mathscr{E}, B_j\in\mathscr{F},\right.$$

$$\left. A_j\times B_j \text{ 互斥}, 1\leqslant j\leqslant n, n\in N\right\}.$$

则 $\mathscr{G}$ 为 $X\times Y$ 中的环.

证 当 $E_1=A_1\times B_1, E_2=A_2\times B_2, A_1,A_2\in\mathscr{E}, B_1,B_2\in\mathscr{F}$，由

$$E_1\cap E_2 = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

与

$$E_1 - E_2 = [(A_1\cap A_2)\times(B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2)\times B_1]$$

知 $E_1\cap E_2\in\mathscr{G}, E_1-E_2\in\mathscr{G}$. 一般地，对

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{n}E_i^1,\quad E_2 = \bigcup_{j=1}^{m}E_j^2,$$

有

$$E_1\cup E_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i^1\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}E_j^2\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \left(E_i^1 \cup E_j^2 \right) \in \mathscr{G};$$

因为 $E_i^1 - E_j^2 \in \mathscr{G}$, $\bigcap_{j=1}^{m} \left(E_i^1 - E_j^2 \right) \in \mathscr{G}$, 故

$$E_1 - E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} \left(E_i^1 - E_j^2 \right) \in \mathscr{G}.$$

这样 $\mathscr{G}$ 是一个环.

于是,由 $\mathscr{G}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{G})$是 $X\times Y$ 中的 σ 环. 我们希望得到的结果是:若$(X,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}))$与$(Y,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{F}))$是可测空间,则$(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{G}))$也是可测空间.

下面我们就更一般的情形证明这个结果.

设 $\mathscr{R}_\sigma$ 与 $\mathscr{S}_\sigma$ 分别为基本集 X 与 Y 的子集所生成的 σ 环,令 $\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$ 表示一切形如 $A\times B(A\in\mathscr{R}_\sigma,B\in\mathscr{S}_\sigma)$的集所生成的 σ 环. 则当$(X,\mathscr{R}_\sigma)$与$(Y,\mathscr{S}_\sigma)$是可测空间时,$(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma)$也是可测空间.

事实上,我们只要证明

$$X \times Y = \bigcup_{E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma} E.$$

一方面,包含关系 $X \times Y \supseteq \bigcup_{E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma} E$ 显然成立. 另一方面,任取 $(x,y) \in X \times Y$, 由

$$X = \bigcup_{A\in\mathscr{R}_\sigma} A \quad 与 \quad Y = \bigcup_{B\in\mathscr{S}_\sigma} B,$$

存在 $A\in\mathscr{R}_\sigma,B\in S_\sigma$,使得 $x\in A,y\in B$,故有$(x,y)\in A\times B\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$,因此

$$X \times Y \subseteq \bigcup_{E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma} E.$$

这就证明了$(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma)$为可测空间.

称 $(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma)$为可测空间$(X,\mathscr{R}_\sigma)$与$(Y,\mathscr{S}_\sigma)$的积空间.

利用上述记号,可测空间$(X,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E}))$与$(Y,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{F}))$的积空

间为可测空间

$$(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\times\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{F}))\equiv(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{G})).$$

为建立乘积测度，我们给出集与函数的截口.

定义 1.14 设 $E\subseteq X\times Y$. 对 X 中的点 $x\in X$，我们称集合

$$E_x=\{y\in Y:(x,y)\in E\}$$

为 E 的 x 截口. 同样，对 $y\in Y$，称集

$$E^y=\{x\in X:(x,y)\in E\}$$

为 E 的 y 截口.

若 $f:X\times Y\to\boldsymbol{R}$ 为积集 $X\times Y$ 上的函数. 对于 X 中的点 $x\in X$，我们称 y 的函数 $f_x(y)=f(x,y)$ 为 f 的 x 截口；对 $y\in Y$，称 x 的函数 $f^y(x)=f(x,y)$ 为 f 的 y 截口.

定理 1.14 在可测空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 与 $(Y,\mathscr{S}_\sigma)$ 的积空间 $(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma\times S_\sigma)$ 中，我们有

(1) 可测集 $E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$ 的每个截口是可测集；

(2) 可测函数 f 的每个截口是可测函数.

证 (1) 实际上要证明当 $E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$ 时，$E_x\in\mathscr{S}_\sigma$ 对所有 $x\in X$ 成立，而且 $E^y\in\mathscr{R}_\sigma$ 对所有 $y\in Y$ 成立. 为此，令

$$\mathscr{G}=\{E\subseteq X\times Y:E_x\in\mathscr{S}_\sigma,E^y\in\mathscr{R}_\sigma,\forall\,x\in X,\forall\,y\in Y\}.$$

任取 $A\in\mathscr{R}_\sigma,B\in\mathscr{S}_\sigma$，则当 $x\in A$ 时，有 $(A\times B)_x=B$；当 $x\notin A$ 时，有 $(A\times B)_x=\varnothing$. 对于 $(A\times B)^y$ 有类似的结果. 故 $A\times B\in\mathscr{G}$. 这表明 $\mathscr{G}$ 包含一切矩形. 进而，再由

$$\left(\bigcup_i E_i\right)_x=\bigcup_j(E_j)_x\quad\text{与}\quad\mathscr{C}E_x=(\mathscr{C}E)_x,$$

知 $\mathscr{G}$ 为 σ 环，故得 $\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma\subseteq\mathscr{G}$. 此即(1).

现证(2). 若 f 为 $X\times Y$ 上的可测函数，由定义，对任何 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，$f^{-1}((-\infty,\alpha))\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$. 任取 $x\in X$，我们有

$$\{y\in Y:f_x(y)>\alpha\}=\{(x,y)\in X\times Y:f(x,y)>\alpha\}_x.$$

由(1)知 $\{(x,y)\in X\times Y:f(x,y)>\alpha\}_x\in\mathscr{S}_\sigma$，这表明 f 的截口 f_x 是可测函数. 对 f^y 可类似地证明.

现在可以在$(X\times Y,\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma)$上建立测度了.

定理 1.15 设$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$与$(Y,\mathscr{S}_\sigma,\nu)$为两个$\sigma$有限的测度空间,对于$E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$,令

$$f: x\to\nu(E_x),\ x\in X,\quad g: y\to\mu(E^y),\quad y\in Y.$$

则f与g分别为关于测度μ与ν的可测函数,并有

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu=\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu, \tag{1.13}$$

记此积分为$\iint\limits_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$, 或简记为$\int_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$.

证 首先,设μ,ν为有限测度,令

$$\mathscr{G}=\{E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma:\ 对\ E,(1.13)\ 式成立\}.$$

若$E=A\times B,A\in\mathscr{R}_\sigma,B\in\mathscr{S}_\sigma$,则$E\in\mathscr{G}$.事实上

$$f(x)=\nu(E_x)=\nu(B)\chi_A(x),\quad g(y)=\mu(E^y)=\mu(A)\chi_B(y),$$

故

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\mathrm{d}\mu&=\nu(B)\int_X\chi_A(x)\mathrm{d}\mu=\nu(B)\mu(A)\\&=\mu(A)\int_Y\chi_B(y)\mathrm{d}\nu=\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

据此,我们把

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\nu\quad 与\quad\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu$$

的公共值$\mu(A)\nu(B)$定义为$A\times B$的测度,并记为$(\mu\times\nu)(E)$.

若

$$E=\bigcup_{k=1}^n E_k,$$

其中$E_k=A_k\times B_k$,两两互斥,$k=1,2,\cdots,n$.则据有限归纳法可得$E\in\mathscr{G}$.故$\mathscr{G}$包含由有限个互斥矩形的并所生成的环$\mathscr{E}$.我们证明$\mathscr{G}\supset\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.为此只需证$\mathscr{G}$为包含$\mathscr{E}$的单调类(定理 1.2).

任取$\mathscr{G}$中的渐张集列$E_n,E_n\subset E_{n+1},n=1,2,\cdots$.令

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

则 $g_n(y)=\mu((E_n)^y)$ 为可测函数,且 $g_n \leqslant g_{n+1}$,

$$g(y) = \mu(E^y) = \lim_{n\to\infty}\mu((E_n)^y).$$

同理,设 $f(x) = \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty}\nu((E_n)_x)$. 由单调收敛定理及 $E_n \in \mathscr{G}$,得

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_Y g_n(y)\mathrm{d}\nu = \int_Y g(y)\mathrm{d}\nu. \tag{1.14}$$

类似地,对于渐缩集列 $E_n \in \mathscr{G}, E_{n+1} \subset E_n, n=1,2,\cdots$,令

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

由于 μ 与 ν 为有限测度,知

$$\mu((E_1)^y) < +\infty, \quad \nu((E_1)_x) < +\infty.$$

再由控制收敛定理便得到(1.14)式,于是 $\mathscr{G}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类. 这证明了当 μ,ν 为有限测度时定理成立.

其次,设 μ,ν 为 σ 有限测度. 令

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \times Y_j,$$

$X_j \times Y_j$ 为渐张集列,并且 $\mu X_j < +\infty, \nu Y_j < +\infty, j=1,2,\cdots$. 对于任意的 $E \in \mathscr{R}_\sigma \times \mathscr{S}_\sigma$,第一步的结论对每个 $j \in \{1,2,\cdots\}$ 成立,即

$$(\mu \times \nu)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_X \chi_{X_j}(x)\nu(E_x \cap Y_j)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_Y \chi_{Y_j}(y)\mu(E^y \cap X_j)\mathrm{d}\nu(y).$$

注意到$(\mu\times\nu)(E\cap(X_j\times Y_j))$单调递增地趋于$(\mu\times\nu)(E\cap(X\times Y))=(\mu\times\nu)(E)$,而 $\nu(E_x\cap Y_j)$,$\mu(E^y\cap X_j)$分别单调递增地趋于$\nu(E_x)$与 $\mu(E^y)$,据单调收敛定理,(1.13)式对 E 成立. 定理得证.

有了乘积测度概念,就可建立如下的 Fubini-Tonelli 定理.

定理 1.16 设$(X,\mathscr{R},\mu)$与$(Y,\mathscr{R},\nu)$为两个σ有限的测度空间,则

(1) (Tonelli) 若f是$X\times Y$上的非负可积函数,则积分

$$g(x)=\int_Y f_x\mathrm{d}\nu \quad 与 \quad h(y)=\int_X f^y\mathrm{d}\mu$$

分别为X与Y上的非负可积函数,并且下式成立

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_X\left(\int_Y f_x\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu=\int_Y\left(\int_X f^y\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu. \qquad (1.15)$$

(2) (Fubini) 若f是$X\times Y$上的可积函数,则对几乎处处的$x\in X$,f_x是Y上的可积函数;对几乎处处的$y\in Y$,f^y是X上的可积函数,并且对于几乎处处定义的函数

$$g(x)=\int_Y f_x\mathrm{d}\nu \quad 与 \quad h(y)=\int_X f^y\mathrm{d}\mu,$$

(1.15)式也成立.

证 (1) 当f为$X\times Y$中某个$\mu\times\nu$可测集$E\in\mathscr{R}_\sigma\times\mathscr{S}_\sigma$的特征函数时,即$f=\chi_E$,Tonelli 定理由定理 1.15 给出. 从而当f为非负简单函数时,据积分的线性性知 Tonelli 定理也成立. 现在,当$f\in L^+(X\times Y)$时,取简单函数列f_n,使$0\leqslant f_n\leqslant f_{n+1}$,$n=1,2,3,\cdots$,且$\lim\limits_n f_n=f$,则函数列

$$g_n(x)=\int_Y (f_n)_x\mathrm{d}\nu \quad 与 \quad h_n(y)=\int_X (f_n)^y\mathrm{d}\mu$$

单调增加. 据单调收敛定理,上述两个函数列分别收敛于

$$g(x)=\int_Y f_x\mathrm{d}\nu \quad 与 \quad h(y)=\int_X f^y\mathrm{d}\mu.$$

故g与h分别为μ与ν可积函数,且

$$\begin{aligned}\int_X g\mathrm{d}\mu&=\int_X \lim_n g_n\mathrm{d}\mu=\lim_n\int_X g_n\mathrm{d}\mu\\&=\lim_n\int_{X\times Y} f_n\mathrm{d}(\mu\times\nu)\\&=\int_{X\times Y}\lim_n f_n\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu);\end{aligned}$$

同理,

$$\int_Y h\mathrm{d}\nu = \int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu).$$

Tonelli 定理得以完全建立.

不难看到,当 $f\in L^+(X\times Y)$ 时,

$$0\leqslant\int_{X\times Y} f\mathrm{d}(\mu\times\nu)<+\infty,$$

从而 $0\leqslant g,h<+\infty$,a. e. ,亦即 $f_x\in L^1(\nu)$ 对于 a. e. 的 x 成立,$f^y\in L^1(\mu)$ 对于 a. e. 的 y 成立.

(2) 当 $f\in L^1(\mu\times\nu)$,这里 $L^1(\mu\times\nu)$ 为 $X\times Y$ 上的可积函数类,只要令 $f=f^+-f^-$,则 $f^+\in L^+(X\times Y)$,$f^-\in L^+(X\times Y)$,对 f^+ 与 f^- 分别使用 Tonelli 定理就可得到(2)的结论. 定理得证.

§2 广义测度

作为§1介绍的测度的继续,现在讨论广义测度.

定义 2.1 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为可测空间,称 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的广义集函数 $\nu:\mathscr{R}_\sigma\to[-\infty,\infty]$ 为广义测度,若

(1) $\nu\varnothing=0$,

(2) ν 可取 $+\infty$ 或 $-\infty$,但至多取其中的一个,

(3) 对于互斥集列 $E_j\in\mathscr{R}_\sigma$,$j=1,2,\cdots$,有

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu E_j,$$

这里约定若 $\nu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j\right)$ 为有限值时,是指级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\nu E_j$ 绝对收敛.

我们把定义 1.6 中的测度称为正测度,简称测度. 本节总假定 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为可测空间.

例 2.1 若 μ_1,μ_2 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的两个测度,且至少有一个是有限测度,则 $\nu=\mu_1-\mu_2$ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度.

例 2.2 对于测度空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$,我们可以从测度 μ 与一个

广义实值 μ 可测函数 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ 出发定义一个广义测度 ν 如下：

设 f^+ 与 f^- 中至少有一个属于 $L^+(\mu)$，则对任意的 $E \in \mathscr{R}_\sigma$，可定义集函数

$$\nu E = \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

由此不难看出，ν 是 $(X, \mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度.

定义 2.2 设 ν 为 $(X, \mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度. 称集 $E \in \mathscr{R}_\sigma$ 为 ν-正集，若对所有满足 $F \in \mathscr{R}_\sigma$，$F \subset E$ 的 F 都有 $\nu F \geqslant 0$ 成立. 类似地，可定义 ν-负集与 ν-零集.

定理 2.1（Hahn 分解定理） 若 ν 为 $(X, \mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度，则存在 X 中的 ν-正集 P 与 ν-负集 N，使得

$$P \cup N = X, \quad P \cap N = \varnothing.$$

证 例如，设 ν 不取 $+\infty$ 值，否则以 $-\nu$ 代替 ν. 我们分以下几步来证明.

首先，我们证明，对于 $\mathscr{R}_\sigma$ 中满足 $\nu A > -\infty$ 的集 A 与任意 $\varepsilon > 0$，存在 $B \subset A$，使得 $\nu B \geqslant \nu A$，并且对所有 $E \subset B$，皆有 $\nu E > -\varepsilon$ 成立.（读者一定注意到，这里的不等式 $\nu B \geqslant \nu A$ 在正测度情形下是不可能的，然而对于广义测度却可能，请思考为什么？）

假定所述结论不成立，则存在 $\varepsilon_1 > 0$，使对每个 $B \subset A$ 且满足 $\nu B \geqslant \nu A$ 的 B，存在 $E_1 \subset B$，使 $\nu E_1 \leqslant -\varepsilon_1$. 从而有

$$\nu(A - E_1) = \nu A - \nu E_1 \geqslant \nu A + \varepsilon_1 \geqslant \nu A > -\infty.$$

取 $A - E_1 = A_1$，对此 A_1，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得每个 $B_1 \subset A_1$ 且 $\nu B_1 \geqslant \nu A_1$ 的 B_1，存在相应的 $E_2 \subset B_1 \subset A_1$，满足 $\nu E_2 \leqslant -\varepsilon_2$. 故

$$\begin{aligned}\nu(A - E_1 - E_2) &= \nu A - \nu E_1 - \nu E_2 \\ &\geqslant \nu A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant \nu A > -\infty.\end{aligned}$$

如此继续下去，得一互斥集列 E_j，$j = 1, 2, \cdots$. 令

$$E = \bigcup_j E_j,$$

则

$$\nu(A-E)=\nu A-\nu E=\nu A-\sum_{j}\nu E_{j}$$
$$\geqslant \nu A+\varepsilon_{1}+\varepsilon_{2}+\varepsilon_{3}+\cdots.$$

不难看出，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{j}=+\infty,$$

故 $\nu(A-E)=+\infty$，这与 ν 不取 $+\infty$ 矛盾. 第一步得证.

其次，我们证明，若 $\nu A>-\infty$，则存在 ν-正集 $P\subset A$，使得 $\nu P\geqslant\nu A$. 事实上，取 $A_1=A$，则 $\nu A_1>-\infty$. 现在，归纳地构造 A_n 如下：

设 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 已选定，满足

$$\nu A_{j}\geqslant \nu A>-\infty,\quad j=1,2,\cdots,n-1.$$

依第一步，对于 A_{n-1}，存在 A_n，使得

$$A_{n}\subset A_{n-1},\quad \nu A_{n}\geqslant \nu A_{n-1},$$

并且对每个 $E\subset A_n$ 有 $\nu E>-1/n$. 令

$$P=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n},$$

则 P 便是满足要求的 ν-正集.

最后，还需证明定理要求的 ν-正集 P 与 ν-负集 N 存在. 只要令

$$s=\sup\{\nu A: A\in\mathscr{R}_{\sigma}\},$$

并据前面的证明，构造 ν-正集列 $\{P_n\}$，使 $\nu P_n\to s$. 再令

$$P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_{n},$$

易证 P 为 ν-正集，并满足 $\nu P=s$. 然后令 $N=X-P$，就可得到 ν-负集 N，而且 P 与 N 满足定理的要求. 这些工作请读者自行完成.

定义 2.3 设 μ 与 ν 为 $(X,\mathscr{R}_{\sigma})$ 上的两个广义测度. 称 μ 与 ν 相互奇异，若存在 $E,F\in\mathscr{R}_{\sigma}$，使

$$E\cap F=\varnothing,\quad E\cup F=X,$$

且 E 为 μ-零集，F 为 ν-零集；记为 $\mu\perp\nu$.

定义 2.4 设 μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的测度，ν 为其上的广义测度. 称 ν 关于 μ 为绝对连续的，若对每个 μ-零测集 E（即 $E\in\mathscr{R}_\sigma,\mu E=0$. 注意，它与 μ-零集不同），也有 $\nu E=0$；记为 $\nu\ll\mu$.

我们建立广义测度的 Jordan 分解定理.

定理 2.2 若 ν 是 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度，则存在唯一的分解式

$$\nu=\nu^+-\nu^-,$$

其中 ν^+ 与 ν^- 为两个相互奇异的正测度，$\nu^+\perp\nu^-$.

证 由广义测度的 Hahn 分解定理，存在 ν-正集 P 与 ν-负集 N，使得 $X=P\cup N,P\cap N=\varnothing$. 令

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap P),\quad \nu^-(E)=-\nu(E\cap N),$$

则 ν^+ 与 ν^- 便是满足要求的两个测度.

唯一性证明如下：若同时有 $\nu=\nu^+-\nu^-,\nu^+\perp\nu^-$ 与 $\nu=\nu_1^+-\nu_1^-$，$\nu_1^+\perp\nu_1^-$. 则存在 $E,F\in\mathscr{R}_\sigma$，满足 $E\cup F=X,E\cap F=\varnothing$，并有

$$\nu_1^-(E)=\nu_1^+(F)=0.$$

于是，$X=E\cup F$ 也是 ν 的 Hahn 分解. 令 $P\Delta E=(P-E)\cup(E-P)$ 为对称差，则有等式

$$\nu(P\Delta E)=\nu(P-E)+\nu(E-P)=0.$$

从而推得 $\nu(P-E)=0$. 同理得 $\nu(E-P)=0$. 于是对每个 $A\in\mathscr{R}_\sigma$ 有

$$\nu_1^+(A)=\nu_1^+(A-E)=\nu(A\cap E)=\nu(A\cap P)=\nu^+(A),$$

$$\nu_1^-(A)=\nu_1^-(A-F)=\nu(A\cap F)=\nu(A\cap N)=\nu^-(A).$$

唯一性得证.

定义 2.5 我们称广义测度 ν 的 Jordan 分解式 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 中的 ν^+ 与 ν^- 分别为 ν 的正变差与负变差. 称 $\nu^++\nu^-$ 为 ν 的全变差，记为 $|\nu|$，$|\nu|=\nu^++\nu^-$.

X 上的复值函数 $f:X\to C$ 关于 ν 的广义积分定义为

$$\int_X f\mathrm{d}\nu=\int_X f\mathrm{d}\nu^+-\int_X f\mathrm{d}\nu^-,$$

上式右边的积分是关于正测度 ν^+ 与 ν^- 的，它们已在上节中定义. X 上的关于广义测度 ν 的可积空间 $L(\nu)$ 定义为

$$L(\nu)=L(\nu^+)\cap L(\nu^-).$$

我们称广义测度 ν 为有限的，若 $|\nu|$ 是有限的；称 ν 为 σ 有限的，若 $|\nu|$ 是 σ 有限的.

由定义不难看出，若广义测度 ν 关于测度 μ 绝对连续，则 $|\nu|$ 关于 μ 也绝对连续；反之亦然，且成立

$$\nu\ll\mu\Leftrightarrow|\nu|\ll\mu\Leftrightarrow\nu^+\ll\mu\text{ 与 }\nu^-\ll\mu.$$

定理 2.3 设 ν 为有限广义测度，μ 为正测度. 则 $\nu\ll\mu$ 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $|\nu E|<\varepsilon$ 对所有满足 $\mu E<\delta$ 的 E 都成立.

证 由于 $\nu\ll\mu$ 当且仅当 $|\nu|\ll\mu$，且有 $|\nu E|\leqslant|\nu|(E)$，故只要对 $|\nu|$ 证明定理就够了. 为此也只要设 ν 为正测度.

充分性显然.

必要性. 我们用反证法. 若结论不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对所有 $n\in N$，有 $E_n\in\mathscr{R}_\sigma$，且 $\mu E_n<2^{-n}$，但却有 $\nu E_n\geqslant\varepsilon_0$ 成立. 令

$$F_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n,\quad F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k,$$

则 $\mu F_k<2^{1-k}$. 故 $\mu F=0$. 但因 $\nu F_k\geqslant\varepsilon_0$，且 ν 为有限，据定理 1.3 中的(3)，有

$$\nu F=\lim_n\nu F_n\geqslant\varepsilon_0.$$

这与假设 $\nu\ll\mu$ 矛盾. 定理得证.

定理 2.4(积分的绝对连续性) 设 μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的正测度. 对于 X 上的复值 μ 可测函数 f，若 $f\in L(\mu)$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\mu E<\delta$ 时，有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\varepsilon.$$

证 据定理 2.3,由

$$\nu E = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

定义的广义测度 ν 关于 μ 是绝对连续的. 对于 $f \in L(\mu)$,只要把上述结果用到 $\mathrm{Re}f$ 与 $\mathrm{Im}f$,便得本定理的结论.

现在我们引进一个记号. 若 μ 与 ν 之间有如下关系:存在实值 μ 广义可积函数 f,使得

$$\nu E = \int_E f \mathrm{d}\mu, \tag{2.1}$$

则记为 $\mathrm{d}\nu = f \mathrm{d}\mu$, 这里广义实值 μ 可积函数 f 可视为一个固定的元.

下面证明广义测度的 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理. 为此先叙述一个引理.

引理 2.1 若 ν 与 μ 为 $(X, \mathscr{R}_\sigma)$ 上的有限测度,则或者 $\nu \perp \mu$,或者存在 $\delta > 0$,及存在 $E \in \mathscr{R}_\sigma$, $\mu E > 0$,使得

$$(\nu - \delta\mu)(E) = \nu E - \delta\mu E > 0,$$

亦即 $\nu \geqslant \delta\mu$ 在 E 上成立.

证 令

$$\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu, \quad n \in N.$$

据 Hahn 分解定理,存在 ν_n-正集 P_n 与 ν_n-负集 N_n,满足

$$X = P_n \cup N_n, \quad P_n \cap N_n = \varnothing, \quad n \in N.$$

记

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \quad N = \mathscr{C}P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}P_n.$$

显然,对每个 $\nu_n, n \in N$, P 与 N 分别为 ν_n-正集与 ν_n-负集. 于是,对任一个 $E \in \mathscr{R}_\sigma$ 且 $E \subset N$,有

$$\nu_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\mu(E) \leqslant 0, \quad n \in N.$$

这蕴涵

$$\nu(E) \leqslant \frac{1}{n}\mu(E).$$

由假设，μ,ν 都是有限(正)测度，故令 $n\to+\infty$，得 $\nu(E)=0$ 对每个 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 成立. 从而 $\nu(N)=0$.

若 $\mu(P)=0$，则据定义 2.3 知 $\mu\perp\nu$.

若 $\mu(P)>0$，则存在 $n_0\in N$，使 $\mu(P_{n_0})>0$，且 P_{n_0} 为 ν_{n_0}-正集. 取

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0 \quad 与 \quad E = P_{n_0},$$

则

$$\mu(E) > 0, \quad 且\ \nu - \varepsilon\mu(E) = \nu_{n_0}(E) \geqslant 0.$$

引理得证.

定理 2.5(Lebesgue-Radon-Nikodym 定理) 设 ν 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的 σ 有限广义测度，μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的 σ 有限测度. 则在 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上存在唯一的一对 σ 有限广义测度 λ 与 ρ，使得

$$\lambda\perp\mu, \quad \rho\ll\mu,$$

且 $\nu=\lambda+\rho$. 进而，存在一广义 μ 可积实函数 $f: X\to\boldsymbol{R}$，使 $\mathrm{d}\rho = f\mathrm{d}\mu$.

证 首先设 ν 与 μ 为有限(正)测度. 令

$$\mathscr{F} = \left\{f: X\to[0,+\infty], 且对每个\ E\in\mathscr{R}_\sigma, \int_E f\mathrm{d}\mu \leqslant \nu E\right\}.$$

则 $f,g\in\mathscr{F}$ 蕴涵 $h=\max(f,g)\in\mathscr{F}$. 其实，若设

$$A = \{x\in X: f(x) > g(x)\},$$

则对每个 $E\in\mathscr{R}_\sigma$，有 $E-A=\{x\in X: f(x)\leqslant g(x)\}$，故

$$\int_E h(x)\mathrm{d}\mu = \left\{\int_A + \int_{E-A}\right\}h\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_{E-A} g\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \nu A + \nu(E-A) = \nu E.$$

令

$$a = \sup\left\{\int_X g\mathrm{d}\mu : g\in\mathscr{F}\right\}.$$

我们证明,存在 $f\in\mathscr{F}$,使得

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = a,$$

并且 f 是 μ-a.e. 有限的(因此不失一般性,可设 f 在 X 上处处取实值). 事实上,因 ν 为正测度,对每个 $g\in\mathscr{F}$,有

$$\int_X g\mathrm{d}\mu \leqslant \nu X < +\infty. \tag{2.2}$$

从而 $a\leqslant\nu X<+\infty$. 选择 $\{f_n\}\subset\mathscr{F}$,使得 $\int_X f_n\mathrm{d}\mu\to a$. 令

$$g_n = \max(f_1,\cdots,f_n),\quad f = \sup_n f_n,$$

由 $\int_X g_n\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f_n\mathrm{d}\mu$, 得

$$\lim_n\int_X g_n\mathrm{d}\mu \geqslant \lim_n\int_X f_n\mathrm{d}\mu = a. \tag{2.3}$$

因此,一方面,$g_n\in\mathscr{F}$,它满足(2.2)式,故有 $\int_X g_n\mathrm{d}\mu\leqslant a$, 再联合(2.3)式,得

$$\lim_n\int_X g_n\mathrm{d}\mu = a.$$

另一方面,由定义 $g_n\uparrow f$,据单调收敛定理,有

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim\int_X g_n\mathrm{d}\mu = a.$$

再因 $g_n\in\mathscr{F}$ 蕴涵 $\int_X g_n\mathrm{d}\mu\leqslant\nu E$,得到 $\int_X f\mathrm{d}\mu\leqslant\nu E$. 于是,$f\in\mathscr{F}$. 这样,$f$ 便是满足要求的函数.

现对上一步所得的 f,我们证明 $\mathrm{d}\nu-f\mathrm{d}\mu$ 关于 μ 是奇异的.

事实上,因 ν 为正测度,$f\in\mathscr{F}$,且 $f: X\to[0,+\infty]$,从而 $f\mathrm{d}\mu$ 确定一个正测度(见(2.1)式). 于是,$\mathrm{d}\nu-f\mathrm{d}\mu$ 确定一个广义测度,记为 λ,或 $\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}\nu-f\mathrm{d}\mu$. 下面我们证明 λ 关于 μ 是奇异的,即 $\lambda\perp\mu$.

如若不然,则 λ 与 μ 之间有关于引理 2.1 的第二种情况成立,即:存在 $\varepsilon>0$ 及 $E\in\mathscr{R}_\sigma$,使得 $\mu E>0$,且 $\lambda\geqslant\varepsilon\mu$ 在 E 上成立. 于是,

对于 E 的特征函数 χ_E，有

$$\varepsilon\chi_E \mathrm{d}\mu \leqslant \chi_E \mathrm{d}\lambda \leqslant \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\nu - f\mathrm{d}\mu,$$

故

$$(f + \varepsilon\chi_E)\mathrm{d}\mu \leqslant \mathrm{d}\nu.$$

这蕴涵 $f+\varepsilon\chi_E \in \mathscr{F}$. 但因

$$\int (f + \varepsilon\chi_E)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \varepsilon\int \chi_E \mathrm{d}\mu = a + \varepsilon\mu E > a,$$

与 a 为上确界矛盾，所以 $\lambda \perp \mu$.

于是，由 $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\nu - f\mathrm{d}\mu$ 得到 $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\lambda + f\mathrm{d}\mu$. 令 $\mathrm{d}\rho = f\mathrm{d}\mu$，便有 $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\lambda + \mathrm{d}\rho$. 进而，$\rho \ll \mu$ 可由定理 2.3 与定理 2.4 得到. f 的 μ-几乎处处意义之下的唯一性，我们留作习题. 这样，在 ν 与 μ 为有限(正)测度的情形下，我们证明了定理.

下面证明，当 μ 与 ν 为 σ 有限(正)测度时，定理结论成立. 不失一般性，将 X 记为

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

而 $\mu A_j < +\infty$，$\nu A_j < +\infty$，$j=1,2,3,\cdots$. 定义

$$\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j), \quad \nu_j(E) = \nu(E \cap A_j), \quad j \in N.$$

对 μ_j, ν_j 应用前一步的结果，得

$$\mathrm{d}\nu_j = \mathrm{d}\lambda_j + f_j \mathrm{d}\mu_j,$$

而且

$$\lambda_j(X - A_j) = 0, \quad f_j|_{X-A_j} = 0.$$

令

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

(μ 与 ν 为正有限测度，保证 λ 与 f 有意义). 得 $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\lambda + f\mathrm{d}\mu$，且也有 $\lambda \perp \mu$，$\mathrm{d}\rho = f\mathrm{d}\mu$，$\rho \ll \mu$ 及 f 的唯一性.

最后，设 ν 为 σ 有限广义测度，只要对 ν^+ 与 ν^- 应用上面结果便得定理的结论. 从而定理得证.

定义 2.6 若ν,λ,ρ与μ满足定理 2.5 的条件，我们称$\nu=\lambda+\rho$为ν关于μ的 Lebesgue 分解. 进而，若还有$\nu\ll\mu$，则分解式中的λ项消失，得$\mathrm{d}\nu=f\mathrm{d}\mu$，这时我们称$f$为$\nu$关于$\mu$的 Radon-Nikodym 导数，记为$f=\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$. 此式实际上表示$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$为$\mu$-几乎处处等于$f$的一个函数类. 不难看出，

$$\frac{\mathrm{d}(\nu_1+\nu_2)}{\mathrm{d}\mu}=\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu}+\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu}. \tag{2.4}$$

定理 2.6 设ν为σ有限的广义测度，μ与λ为σ有限测度，又设$\nu\ll\mu$，且$\mu\ll\lambda$，则我们有

(1) $\nu\ll\lambda$，且下式成立

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda},\quad \lambda\text{-a. e. }; \tag{2.5}$$

(2) 若还有$g\in L(\nu)$，则$g(\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu)\in L(\mu)$，且

$$\int_X g\mathrm{d}\nu=\int_X g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu; \tag{2.6}$$

(3) 若更有$\mu\ll\lambda$与$\lambda\ll\mu$，则$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\mu=(\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda)^{-1}$关于$\lambda$-或$\mu$-几乎处处成立.

证 不失一般性，只需对ν为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的正测度进行证明. 先证(2).

由$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$的定义知道，当$g=\chi_E$时，(2)中的等式成立，亦即

$$\int_X \chi_E\mathrm{d}\nu=\int_X g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu,$$

这里χ_E是E的特征函数. 然后，由积分的线性及非负函数的单调收敛定理，知(2)中等式对非负可积函数成立. 再由积分的线性性，知(2)对任意的$g\in L(\nu)$成立.

对于(1)，用μ与λ代替ν与μ，令$g=\chi_E\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$，由(2)可得

$$\nu E=\int_E\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu=\int_E\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

对所有$E\in\mathscr{R}_\sigma$成立，故得(1).

(3) 则是上述(1)与(2)的推论.

§3 Borel 测度，正则 Borel 测度，Radon 测度

读者已经看到，在可测空间$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上不一定有测度，但仍可定义可测集与可测函数. 而在测度空间$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$上，由于测度$\mu$的引进，关于$\mu$可测集与$\mu$可测函数的性质要比可测空间上的情形丰富得多，而且可以建立相应的抽象积分理论. 然而，不论是可测空间还是测度空间，对集合X都只要求是一个给定的基本集，并未涉及X的拓扑结构与代数结构. 现在，在本节中我们假设X为T_2型局部紧拓扑空间，然后在这种空间上来讨论测度的具体表现形式. 本节中所提到的测度都是指正测度.

定义 3.1 设X为一T_2型局部紧拓扑空间，τ为X中开子集的全体所成的集族. 我们称由τ所生成的σ代数$\mathscr{B}\equiv\mathscr{A}_\sigma(\tau)$为$X$的 Borel 集类，而称$\mathscr{B}$的元为$X$的 Borel 集. 这样，$(X,\mathscr{B})$成为一个可测空间. $\mathscr{B}$中的每个 Borel 集便是可测集. 在$(X,\mathscr{B})$上，可测函数的定义与§1 的定义 1.4 一致. 不仅如此，我们还可以定义$(X,\mathscr{B})$上的可测映射. 例如，设Y也是一个拓扑空间，$f: X\to Y$为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射. 若对Y的任意开子集G，都有$f^{-1}(G)\in\mathscr{B}$，则称f为 Borel 可测映射，或简单地称为 Borel 映射. 当$Y=\boldsymbol{R}$时，f称为 Borel 函数.

由定义立即得到，若$f: X\to Y$为连续映射，则它是 Borel 映射.

定义 3.2 若μ是定义在T_2型局部紧空间X的 Borel 集类$\mathscr{B}$上的测度，则称μ为X上的 Borel 测度.

若μ为X上的正 Borel 测度，并且对 Borel 集$E\in\mathscr{B}$，有

$$\mu E=\inf\{\mu U: U\supseteq E \text{ 且 } U \text{ 为 } X \text{ 的开子集}\},$$

则称μ在E上是外正则的；

若对$E\in\mathscr{B}$有

$$\mu E=\sup\{\mu K: K\subseteq E \text{ 且 } K \text{ 为 } X \text{ 的紧子集}\},$$

则称 μ 在 E 上是内正则的.

若 μ 在所有 Borel 集上既是内正则又是外正则的，就称 μ 为 X 上的正则 Borel 测度.

比正则 Borel 测度稍弱一些的是 Radon 测度.

定义 3.3 若 μ 为 X 上的 Borel 测度，并且它在每个 Borel 集上是外正则的，在每个开集上是内正则的，而在每个紧子集上是有限的，则称 μ 为 X 上的 Radon 测度.

现在我们来证明 T_2 型局部紧空间 X 上关于 Radon 测度的 Riesz 表现定理.

先引进几个记号：

(1) τ：X 中开集的全体所生成的集类.

(2) $\mathscr{K}$：X 中紧集的全体所生成的集类.

(3) $C(X)$：X 上复值连续函数的全体.

(4) $B(X)$：X 上有界复值函数的全体.

(5) $\|f\|_u$：f 的一致范数，

$$\|f\|_u = \sup\{f(x)| : x \in X\}.$$

(6) $\operatorname{supp}(f)$：连续函数 f 的支集，

$$\operatorname{supp}\{(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

(7) $C_c(X)$：$C(X)$中 $\operatorname{supp}(f)\in\mathscr{K}$ 的 f 的全体.

(8) $C_0(X)$：$C_0(X)=\{f\in C(X)$ ：对任意 $\varepsilon>0$，$\{x\in X : |f(x)|\geqslant\varepsilon\}\in\mathscr{K}\}$.

(9) $f\prec U$：对于 $f\in C_c(X)$与 X 的开子集 U，若 $0\leqslant f\leqslant 1$，且 $\operatorname{supp}(f)\subset U$，记为 $f\prec U$.

定理 3.1 设 I 为 $C_c(X)$上的正线性泛函，亦即对 $C_c(X)$中的 $f\geqslant 0$，有 $I(f)\geqslant 0$. 则存在 X 上唯一的 Radon 测度 μ，使得

$$I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

对所有 $f\in C_c(X)$成立，并且 μ 满足：

(1) 若 $U\in\tau$，则 $\mu(U)=\sup\{I(f) : f\in C_c(X)$且 $f\prec U\}$；

(2) 若 $K\in\mathscr{K}$，则 $\mu(K)=\inf\{I(f):f\in C_c(X)$ 且 $f\geqslant\chi_K\}$，其中 χ_K 为 K 的特征函数.

证 先证唯一性. 若 μ 是满足定理结论的 Radon 测度，由于它在每个 Borel 集上是外正则的，而在每个开集上是内正则的，我们只要证明 μ 在每个紧集 $K\in\mathscr{K}$ 上唯一确定就够了. 为此，设 μ_1 与 μ_2 为满足定理结论的两个 Radon 测度，给定 $K\in\mathscr{K}$. 任给 $\varepsilon>0$，据 μ_1,μ_2 的外正则性与 Urysohn 引理以及假设条件(1)与(2)，存在开子集 $U\in\tau$，使 $K\subset U$，并且存在 $f\in C_c(X)$，使得 $f\prec U$，且 $f|_K=1$，满足

$$\begin{aligned}\mu_1(K)=\int_X\chi_K\mathrm{d}\mu_1\leqslant\int_X f\mathrm{d}\mu_1=I(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu_2\\ \leqslant\int_X\chi_U\mathrm{d}\mu_2=\mu_2(U)<\mu_2(K)+\varepsilon.\end{aligned}$$

从而，$\mu_1(K)\leqslant\mu_2(K)$. 类似的论证可得 $\mu_2(K)\leqslant\mu_1(K)$. 唯一性得证.

为证存在性，当 $C_c(X)$上的正线性泛函 I 给定后，我们采取以下步骤来定义 μ，并证明它满足定理结论.

(a) 对 X 的每个开子集 $U\in\tau$，定义

$$\mu(U)=\sup\{I(f):f\in C_c(X)\text{ 且 }f\prec U\}.\tag{3.1}$$

(b) 对 X 的任一子集 E，定义

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U):U\supset E,\text{且 }U\in\tau\}.\tag{3.2}$$

这样定义的 μ^* 当 $E=U\in\tau$ 时有 $\mu^*(U)=\mu(U)$. 事实上，对于 $U\in\tau$，一方面有

$$\mu^*(U)=\inf\{\mu(V):V\supset U,\text{且 }V\in\tau\}\leqslant\mu(U);\tag{3.3}$$

另一方面，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $V\in\tau$，且 $V\supset U$，使

$$\mu(V)<\mu^*(U)+\varepsilon.$$

由(3.1)式定义的 μ 的单调性是明显的，故得到 $\mu(U)\leqslant\mu(V)<\mu^*(U)+\varepsilon$. ε 的任意性给出 $\mu(U)\leqslant\mu^*(U)$. 结合(3.3)式便得

$$\mu(U)=\mu^*(U).$$

(c) 证明 μ^* 为 $\mathscr{P}(X)$上的外测度.

只需证明,对于$\{E_j\}\subset\mathscr{P}(X)$,有

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j). \tag{3.4}$$

然而,也只需对 $E_j=U_j\in\tau$ 证明(3.4)式就够了,因为不难看出,由(3.2)式定义的 μ^* 有如下的表示

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(U_j):U_j\in\tau,\text{且 }E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j\right\}. \tag{3.5}$$

现在证明(3.4)式对于 $E_j=U_j\in\tau$ 成立. 取 $f\in C_c(X)$且 $f\prec U$,令 $K=\mathrm{supp}(f)$. 由于 $K\in\tau$,而且

$$K\subset U=\bigcup_j U_j,$$

故存在 $U_1,\cdots,U_n$,使得 $K\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_j$. 从而存在 $g_1,\cdots,g_n\in C_c(X)$,使得 $g_1\prec U_j$,且 $\sum_{j=1}^{n}g_j=1$ 在 K 上成立. 于是,我们得到

$$f=\sum_{j=1}^{n}fg_j,\quad fg_j\prec U_j.$$

这样,对正线性泛函 I,下式成立

$$I(f)=I\left(\sum_{j=1}^{n}fg_j\right)=\sum_{j=1}^{n}I(fg_j)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mu(U_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(U_j).$$

因 $f\prec U$,故得

$$\mu(U)\leqslant I(f)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(U_j).$$

这就证明了(3.4)式对于 $E_j=U_j\in\tau$ 成立.

(d) 证明每个开子集 $U\in\tau$ 是 μ^* 可测的. 也就只要证明对每个 $U\in\tau$ 与每一个 $E\in\mathscr{P}(X)$,有

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(E\cap U)+\mu^*(E\cap\mathscr{C}U). \tag{3.6}$$

$\mu^*(E)=+\infty$时(3.6)式显然成立. $\mu^*(E)<+\infty$时,再分两种情况考虑:

情形一. $E\in\tau$ 时,有 $E\cap U\in\tau$,故

$$\mu(E\cap U)=\sup\{I(f): f\in C_c(X), f\prec E\cap U\}.$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $f\in C_c(X)$,$f\prec E\cap U$,使得

$$I(f)>\mu(E\cap U)-\varepsilon,$$

而且 $E-\operatorname{supp}(f)=E\cap\mathscr{C}\operatorname{supp}(f)\in\tau$ 为开集,从而存在 $g\in C_c(X)$,$g\prec E-\operatorname{supp}(f)$,使得

$$I(g)>\mu(E-\operatorname{supp}(f))-\varepsilon.$$

由于 $\operatorname{supp}(g)\cap\operatorname{supp}(f)=\varnothing$,故

$$0\leqslant f+g\leqslant 1,\quad f+g\prec E,$$

我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(E)=\mu(E)&\geqslant I(f+g)=I(f)+I(g)\\&>\mu(E\cap U)+\mu(E-\operatorname{supp}(f))-2\varepsilon\\&=\mu^*(E\cap U)+\mu^*(E-\operatorname{supp}(f))-2\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$,得到

$$\begin{aligned}\mu^*(E)&\geqslant\mu^*(E\cap U)+\mu^*(E-\operatorname{supp}(f))\\&\geqslant\mu^*(E\cap U)+\mu^*(E-U).\end{aligned}$$

情形一得证.

情形二. $E\in\mathscr{P}(X)$ 时,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $V\in\tau$,$V\supset E$,使得 $\mu(V)<\mu^*(E)+\varepsilon$. 于是有

$$\begin{aligned}\mu^*(E)+\varepsilon>\mu(V)&\geqslant\mu^*(V\cap U)+\mu^*(V-U)\\&\geqslant\mu^*(E\cap U)+\mu^*(E-U),\end{aligned}$$

由 ε 的任意性即得(3.6)式.

至此,我们证明了 $U\in\tau$ 是 μ^* 可测的.

(e) 证明:对 X 的 Borel 集类 $\mathscr{B}$ 而言,每个 $E\in\mathscr{B}$ 是 μ^* 可测的,因而 $\mu=\mu^*|_{\mathscr{B}}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的 Borel 测度,并且 μ 在 $\mathscr{B}$ 上是满足(1)的外正则测度.

由(d)知每个 $U\in\tau$ 为 μ^* 可测,据定理 2.2,μ^* 可测集的全体 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 环,而且 $\tau\subset\mathscr{A}$,故它包含由 τ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\tau)$. 但因 $X\in\tau$,故 $\mathscr{R}_\sigma(\tau)=\mathscr{A}_\sigma(\tau)=\mathscr{B}$. 这样,$\mu^*|_{\mathscr{B}}$ 为 Borel 测度,满足

(1)，同时由(3.2)式知，μ 在 $\mathscr{B}$ 上是外正则的.

(f) 证明 $\mu=\mu^*|_{\mathscr{B}}$满足(2)，并且在 τ 上是内正则的，在 $\mathscr{K}$ 上是有限的.

其实，固定一个 $K\in\mathscr{K}$，对任意的 $\varepsilon>0$，与任一个 $f\in C_c(X)$，且 $f\geqslant\chi_K$，令

$$U_\varepsilon=\{x\in X:f(x)>1-\varepsilon\}.$$

U_ε 为开集，故 $g\in C_c(X)$，$g\prec U_\varepsilon$，得

$$0\leqslant g(x)\leqslant 1<(1-\varepsilon)^{-1}f(x).$$

从而

$$I(g)\leqslant I((1-\varepsilon)^{-1}f)=(1-\varepsilon)^{-1}I(f).$$

我们得到

$$\mu(K)\leqslant\mu(U_\varepsilon)\leqslant(1-\varepsilon)^{-1}I(f).$$

令 $\varepsilon\to 0$，上式蕴涵 $\mu(K)\leqslant I(f)$. 于是

$$\mu(K)\leqslant\inf\{I(f):f\in C_c(X),f\geqslant\chi_K\}.\tag{3.7}$$

另一方面，对于每个 $U\in\tau$，且 $U\supset K$，据 Urysohn 引理知，存在 $f\in C_c(X)$，满足 $f|_K=1$，$f|_{\complement U}=0$，$0\leqslant f\leqslant 1$，即 $f\geqslant\chi_K$，$f\prec U$. 由此我们得到

$$I(f)\leqslant\mu(U).$$

对上式左边取下确界得

$$\inf\{I(f):f\in C_c(X),f\geqslant\chi_K\}\leqslant\mu(U);$$

再对其右边取下确界，并利用 μ 的外正则性，得

$$\begin{aligned}&\inf\{I(f):f\in C_c(X),f\geqslant\chi_K\}\\&\leqslant\inf\{\mu(U):U\supset K,U\in\tau\}=\mu(K).\end{aligned}\tag{3.8}$$

(3.7)与(3.8)式给出(2)所要求的等式. 为完成(2)的证明，还需要证：

(i) $\mu(K)<+\infty$对每个 $K\in\mathscr{K}$ 成立；

(ii) μ 是内正则的.

这两个事实的证明留给读者作为习题.

(g) 证明对每个 $f \in C_c(X)$, $I(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$ 皆成立.

分四种情形讨论:

情形一. 首先对 $f \in C_c(X)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$ 证明上述结论. 令 $K_0 = \operatorname{supp}(f)$. 对每个固定的 $N \in \boldsymbol{N}$, 作紧集

$$K_j = \left\{x \in X : f(x) \geqslant \frac{j}{N}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{j}{N}, 1\right]\right) \subset K_0.$$

不难看出, $K_j \supset K_{j+1}$. 在 K_{j+1} 上定义函数 $f_j (1 \leqslant j \leqslant N)$ 如下:

$$f_j(x) = \begin{cases} 0, & x \notin K_{j-1}, \\ f(x) - \dfrac{j-1}{N}, & x \in K_{j-1} - K_j, \\ 1/N, & x \in K_j. \end{cases}$$

我们有

$$\frac{1}{N}\chi_{K_j} \leqslant f_j \leqslant \frac{1}{N}\chi_{K_{j-1}}.$$

由于 μ 是正则 Radon 测度, 其相应的积分可按 §1 中所述的方式定义, 从而两个积分

$$\int_X f_j \mathrm{d}\mu \quad 与 \quad \int_X \chi_{K_j} \mathrm{d}\mu$$

有意义. 据 μ 的单调性, 有

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \int_X f_j \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}). \tag{3.9}$$

由 f_j 的定义与 f 的连续性, 知

$$f_j \in C_c(X), \quad 0 \leqslant N f_j \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}(f_j) \subset K_j.$$

由此, 对满足 $U \supset K_{j-1}$ 的 $U \in \tau$, 下面不等式成立:

$$I(N f_j) \leqslant \mu(U).$$

于是

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant I(f_j) \leqslant \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}). \tag{3.10}$$

因为 $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$, 分别对(3.9)与(3.10)式求和, 得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leqslant \int_X f\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j)$$

与

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leqslant I(f) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j).$$

故

$$\left|I(f) - \int_X fd\mu\right| \leqslant \frac{1}{N}\{\mu(K_0) - \mu(K_N)\}$$
$$\leqslant \frac{1}{N}\mu(\mathrm{supp}(f)).$$

再据 $\mathrm{supp}(f) \in \mathscr{K}$，$\mu(\mathrm{supp}(f)) < +\infty$，令 $N \to +\infty$，得

$$I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

情形二. 若 $f \in C_c(X)$，$f \geqslant 0$，则 $\max f = M < +\infty$. 作 $f_1 = f/M$，易见 f_1 满足情形一的条件，从而

$$I(f_1) = \int_X f_1\mathrm{d}\mu,$$

此即 $I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu$.

情形三. 若 $f \in C_c(X)$，且 f 取实值，则令 $f = f^+ - f^-$. 对 f^+ 与 f^- 分别使用情形二的结果，再利用积分与泛函的线性性，便得

$$I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

情形四. 若 $f \in C_c(X)$，且 f 取复值，令 $f = \mathrm{Re}f + \mathrm{i}\mathrm{Im}f$. 对 f 的实部 $\mathrm{Re}f$ 与虚部 $\mathrm{Im}\, f$ 分别使用情形三的结果，得到

$$I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

定理得证.

Radon 测度被广泛地应用于泛函分析、微分方程及其他数理学科等领域，因此研究它的性质至关重要. 下面我们给出一些基本性质，有的证明留作习题.

定理 3.2 设 X 为 T_2 型局部紧空间，我们有

(1) 若 μ 为 X 上的 σ 有限 Radon 测度，则 μ 是正则的；

(2) 若 X 为 σ 紧空间，μ 为 X 上的 Radon 测度，则 μ 是正则的.

证 (1) 只要证明 μ 在每个 Borel 集上内正则就够了. 为此也只要证明 Radon 测度 μ 在每个 σ 有限集上是内正则的(参看本章习题 28).

分两种情况证明：

(a) 设 $E\in\mathscr{B}$ 为 X 中的 μ 可测集，且 $\mu(E)<+\infty$. 由 μ 在 $\mathscr{B}$ 上的外正则性，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $U\in\tau$，满足

$$U\supset E,\quad \mu(U)<\mu(E)+\varepsilon.$$

从而，$\mu(U-E)<\varepsilon$. 据 $U-E\in\mathscr{B}$ 与 μ 的外正则性，有 $V\in\tau$，$V\supset U-E$，使 $\mu(V)<2\varepsilon$. 再由 μ 在 τ 上的内正则性，对上述 U，存在 $K\in\mathscr{K}$，$K\subset U$，使

$$\mu(K)>\mu(U)-\varepsilon.$$

令 $K_1=K-V$，则 $K_1\in\mathscr{K}$，$K\subset E$. 于是

$$\begin{aligned}\mu(K_1)&=\mu(K)-\mu(K\cap V)>\mu(U)-\varepsilon-\mu(V)\\&>\mu(E)-3\varepsilon,\end{aligned}$$

这恰给出 $\mu(E)=\sup\{\mu(K):K\subset E,K\in\mathscr{K}\}$.

(b) 设 E 为 σ 有限集，且 $\mu(E)=+\infty$. 令

$$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j.$$

不失一般性，设 $E_j\uparrow$，并且 $\mu(E_j)<+\infty$，$\mu(E)=\lim\limits_j\mu(E_j)$. 于是对任意 $N\in\mathbf{N}$，有 $j\in\mathbf{N}$，使得

$$\mu(E_j)>N.$$

由 μ 在 E_j 的内正则性，存在 $K\in\mathscr{K}$，使 $K\subset E_j$，且

$$\mu(K)>\mu(E_j)+\varepsilon>N+\varepsilon.$$

故

$$\sup\{\mu(K):K\subset E_j\subset E,\ K\in\mathscr{K}\}=+\infty=\mu(E).$$

(a)与(b)给出 μ 在 E 上的内正则性.

(2)的证明留作习题.

定理 3.3 设 μ 为 X 上的 σ 有限 Radon 测度，$E\in\mathscr{B}$ 为 X 中的 Borel 集，则

(1) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在开集 U 与闭集 F，使 $F\subset E\subset U$，且有 $\mu(U-F)<\varepsilon$.

(2) 存在 F_σ 型集 A 与 G_δ 型集 B，使 $A\subset E\subset B$，且

$$\mu(B-A)=0,$$

这里 F_σ 型集定义为可列多个闭集的并，G_δ 型集定义为可列多个开集的交.

证 取 $E\in\mathscr{B}$，令

$$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,\quad E_j\text{ 互斥},\quad \mu(E_j)<+\infty.$$

由外正则性，任给 $\varepsilon>0$，存在 $U_j\in\tau$，$U_j\supset E_j$，使

$$\mu(U_j)<\mu(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

令 $U=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}U_j\in\tau$，则 $U\supset E$，且

$$\begin{aligned}\mu(U-E)&=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}U_j-\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\Big)=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j-E_j)\Big)\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(U_j-E_j)<\sum_{j=1}^{\infty}(\mu(U_j)-\mu(E_j))\\&<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

这蕴涵 $\mu(U-E)<\varepsilon/2$.

另一方面，由 $\mathscr{C}E\in\mathscr{B}$，据如上同样推理，存在 $V\in\tau$，$V\supset\mathscr{C}E$，使

$$\mu(V-\mathscr{C}E)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $F=\mathscr{C}V$，F 为闭集，且 $F\subset E\subset U$，有

$$\begin{aligned}\mu(U-F) &= \mu((U-E)\cup(E-F)) \\ &= \mu(U-E)+\mu(E-F) \\ &= \mu(U-E)+\mu(V-\mathscr{C}E) < \varepsilon.\end{aligned}$$

(1)得证.

现证(2). 取 $\varepsilon=1/n$，据(1)的结论，存在 $F_n\subset E\subset U_n$，F_n 为闭集，U_n 为开集，满足

$$\mu(U_n-F_n)<\frac{1}{n}.$$

令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,\quad B=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n,$$

A 为 F_σ 型集，B 为 G_δ 型集，满足 $A\subset E\subset B$，且

$$\mu(B-A)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)<\mu(U_n-F_n)<\frac{1}{n}.$$

故 $\mu(B-A)=0$. 定理得证.

定理 3.4 若 μ 是 X 上的 Radon 测度，则 $C_c(X)$ 在 $L^p(\mu)$ 中稠密，$1\leqslant p<+\infty$.

证 首先注意到，若 μ 为 X 上的正测度，则简单函数集

$$S=\left\{f=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}:\mu(E_j)<+\infty,E_j\text{ 互斥},\right.$$

$$\left.a_j\text{ 为常数},1\leqslant j\leqslant n\right\}$$

在 L^p 中稠密，$1\leqslant p<\infty$. 显然 $S\subset L^p$，且

$$\begin{aligned}\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu &= \int_X\left\|\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}\right\|^p\mathrm{d}\mu=\int_X\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\chi_{E_j}\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\mu(E_j).\end{aligned}$$

据积分中众所周知的定理，对 $f\in L^p$，存在简单函数列 $\varphi_n\in S$，使得 $\varphi_n\to f$，a.e.，且 $|\varphi_n|\leqslant|f|$. 因此，由

$$\varphi_n\in L^p\quad\text{及}\quad|\varphi_n-f|^p\leqslant 2^p|f|^p\in L^1,$$

利用控制收敛定理便得

$$\| \varphi_n - f \|_p \to 0.$$

于是为证明定理，只需证：对于每个 $E \in \mathscr{B}$，$\mu(E) < +\infty$，存在 $f \in C_c(X)$，使得

$$\| \chi_E - f \|_p < \varepsilon.$$

事实上，对任给的 $\varepsilon > 0$，由 Radon 测度在 σ 有限集上的内正则性，对于 $E \in \mathscr{B}$，存在 $K \in \mathscr{K}$，$K \subset E$，使

$$\mu(E) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(K).$$

再由 Radon 测度的外正则性，存在 $U \in \tau$，$U \supset E$，使

$$\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} > \mu(U).$$

于是

$$\begin{aligned} \mu(U - K) &= \mu(U - E) + \mu(E - K) \\ &= \mu(U) - \mu(E) + \mu(E) - \mu(K) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

对 K 与 U 使用 Urysohn 引理，存在 $f \in C_c(X)$，使得 $\chi_E \leqslant f \leqslant \chi_U$. 我们得到

$$\begin{aligned} \| \chi_E - f \|_p &= \left\{ \int_X |\chi_E(x) - f(x)|^p \mathrm{d}\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\{ \int_{U-E} |\chi_E - f|^p \mathrm{d}\mu + \int_{E-K} |\chi_E - f|^p \mathrm{d}\mu \right. \\ &\quad \left. + \int_K |\chi_E f|^p |\mathrm{d}\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \{ \mu(U - E) + \mu(E - K) \}^{\frac{1}{p}} \\ &= \{ \mu(U - K) \}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

这就是要证明的.

著名的 Lusin 定理的结论对 Radon 测度也是成立的.

定理 3.5 若 μ 是 X 上的 Radon 测度，$f: X \to C$ 为 μ 可测函

数，且 $\mu(E)=\mu(\{\chi\in X : f(x)\neq 0\})<+\infty$. 则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\varphi\in C_c(X)$，使得不等式

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$$

成立. 若还假定 f 是有界的，则 φ 也有界，且满足 $\|\varphi\|_u\leqslant\|f\|_u$.

读者可参照实变函数的方法自行证明. 这个定理的意义是明显的：在定理的条件下，μ 可测函数除了一个 μ 测度任意小的可测集外，与一个具有紧支集的连续函数相等.

最后可以仿照 § 2 中的思路定义广义 Radon 测度.

定义 3.4 设 X 为 T_2 型局部紧空间，μ 为 X 上的 Borel 测度. 若 μ 的正变差 μ^+ 与负变差 μ^- 都是正 Radon 测度，则称 μ 为广义 Radon 测度.

关于广义 Radon 测度的性质及结构，在此就不多叙述了.

§ 4 复 测 度

Riesz 表现定理（定理 3.1）显示了测度论与泛函分析的紧密联系，也提供了构造测度的有力工具. 本节将引入在理论与应用上都有重要意义的复测度及复 Radon 测度等概念，给出一些重要性质，并证明 $C_0(X)$ 的对偶空间是 X 上全体复 Radon 测度所生成的集合 $M(X)$，由此读者可体会到复测度的实质.

现在讨论复测度. 我们给出如下定义.

定义 4.1 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为一可测空间，称 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的复值集函数 $\mu:\mathscr{R}_\sigma\to C$ 为复测度，如果

(1) $\mu\varnothing=0$,

(2) 若 $E_j\in\mathscr{R}_\sigma$ 为两两互斥的集列，则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu E_j,$$

这里等式是在右边级数绝对收敛意义下成立；特别指出，级数不允许取无限值. 因此，一个广义测度或正测度（参看定义 2.5 或定义

1.6)视为复测度，当且仅当它们是有限测度.

若 μ 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的复测度，我们记

$$\mu_r = \mathrm{Re}\mu, \quad \mu_i = \mathrm{Im}\mu,$$

从而 μ_r 与 μ_i 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的广义测度，但都不取$\pm\infty$. 因此复测度的值域为复平面上的有界子集.

对于复测度空间$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$上定义的可测函数(实值或复值的)，仿照定义1.13，可以在实测度空间$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu_r)$与$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu_i)$上分别定义积分

$$\int_X f\mathrm{d}\mu_r \quad 与 \quad \int_X f\mathrm{d}\mu_i.$$

而 $L(\mu)=L(X,\mu)$定义为 $L(\mu_r)\cap L(\mu_i)$，且

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu_r + \mathrm{i}\int_X f\mathrm{d}\mu_i.$$

类似于定义2.4，我们有

定义 4.2 设 μ 与 ν 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的两个复测度. 若 $\mu_a\perp\nu_b$，a,b 分别等于 r,i，则称 μ 与 ν 互相奇异. 对于$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的正测度 λ，若 $\mu_r\ll\lambda$，$\mu_i\ll\lambda$，则称 μ 关于 λ 绝对连续，并记为 $\mu\ll\lambda$.

关于复测度的 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理可由定理2.5得到.

定理 4.1 设 ν 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的复测度，μ 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的 σ 有限正测度. 则存在唯一的复测度 λ 与 μ 可积函数 $f\in L(\mu)$，使 $\lambda\perp\mu$，且 $\mathrm{d}\nu=\mathrm{d}\lambda+f\mathrm{d}\mu$，$f$ 在 μ-a.e. 相等意义下唯一.

如同前面定理2.5后面的说明那样，若 $\lambda=0$，记 $f=\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$，并把 f 称为 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数. 复测度的全变差定义如下.

定义 4.3 设$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的复测度 ν 与正测度 μ 满足

$$\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu, \quad f\in L(\mu).$$

我们称满足 $\mathrm{d}\lambda = |f|\mathrm{d}\mu$ 的正测度 λ 为 ν 的全变差，记为 $|\nu|$，亦即 ν 的全变差是满足 $\mathrm{d}|\nu| = |f|\mathrm{d}\mu$ 的正测度 $|\nu|$.

不难看出,ν 的全变差不依赖于 f 与 μ 的选取(参看本章习题33),并且当 ν 为广义测度时,$|\nu|$与前面的定义 2.5 一致.

定理 4.2 设 ν 为$(X,\mathscr{R}_\sigma)$上的复测度,则

(1) $\nu \ll |\nu|$,并且 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$ 的绝对值是 $|\nu|$-a.e. 等于 1 的;

(2) $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E), E\in\mathscr{R}_\sigma$;

(3) $L(\nu)=L(|\nu|)$,且若 $f\in L(\nu)$,则有

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\nu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}|\nu|.$$

证 由定义即可得到

$$\nu \ll |\nu|.$$

为证 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|$ 的绝对值 $|\nu|$-a.e. 等于 1,设

$$\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu, \quad g = \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}|\nu|.$$

于是

$$f\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}|\nu| = g|f|\mathrm{d}\mu.$$

故 $f=g|f|$,μ-a.e. 成立,也就得到 $f=g|f|$,ν-a.e.. 但是,$|f|>0$,ν-a.e.,因此,$|g|=1$,ν-a.e.,(1)得证.

(2)与(3)的证明留给读者.

对于复测度的其他一般性质,可参看本章习题. 现在我们讨论当 X 为 T_2 型局部紧拓扑空间时,其上的复测度的构造.

定义 4.4 设 X 为 T_2 型局部紧空间,$\mathscr{B}$ 为 X 上的 Borel 集类,我们称 $\mathscr{B}$ 上的复测度 μ 为复 Radon 测度,若它的实部 μ_r 与虚部 μ_i 都是 $\mathscr{B}$ 上的广义 Radon 测度,并且都不取$\pm\infty$. 记 X 上的所有复 Radon 测度的全体为 $M(X)$,定义

$$\|\mu\| = |\mu|(X), \quad \mu\in M(X),$$

其中$|\mu|$为 μ 的全变差. 由本章习题 33 知 $\|\mu\|<+\infty$. 由于在 T_2 型局部紧空间 X 上,我们有

$$\overline{C_c(X)} = C_0(X).$$

这里闭包是在一致范数 $\|f\|_u$的拓扑之下取的,因此,由定理 3.1 确定的 X 上的 Radon 测度 μ,其对应的 $C_c(X)$上的正线性泛函

$$I(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu$$

可以连续地扩张到 $C_0(X)$ 的充要条件是，$I(f)$ 有界（关于一致范数 $\|f\|_u$ 而言）. 事实上，据定理 3.1 的(1)，

$$\mu(X)=\sup\left\{\int_X f\mathrm{d}\mu : f\in C_0(X), 0\leqslant f\leqslant 1\right\},$$

并且因为

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_X |f|\mathrm{d}\mu,$$

故 $I(f)$ 关于一致范数 $\|f\|_u$ 的有界性可由 $\mu(X)<+\infty$ 给出，而 $\mu(X)$ 正是泛函 I 的范数. 于是 $C_0(X)$ 上的正线性泛函就与 X 上的一个有限 Radon 测度等同了. 下面我们要证明 $C_0(X)$ 上的任一个连续线性泛函等同于 X 上的一个复 Radon 测度.

记 $C_0(X)^*$ 为 $C_0(X)$ 的对偶空间; $C_0(X,\boldsymbol{R})$ 为 $C_0(X)$ 中的实值函数 f 的全体; $C_0(X,\boldsymbol{R})^*$ 为 $C_0(X,\boldsymbol{R})$ 的对偶空间.

函数空间 $C_0(X,\boldsymbol{R})$ 有如下的 Jordan 分解.

引理 4.1 若 $I\in C_0(X,\boldsymbol{R})^*$，则存在两个正线性泛函 $I^+, I^-\in C_0(X,\mathbf{R})^*$，使

$$I=I^+-I^-.$$

证 对于任一个 $I\in C_0(X,\boldsymbol{R})^*$，当 $f\in C_0(X,\boldsymbol{R}^+)$ 时，定义

$$I^+(f)=\operatorname{sgn}\{I(g) : g\in C_0(X,\boldsymbol{R}), 0\leqslant g\leqslant f\}.$$

由于

$$|I(g)|\leqslant\|I\|\ \|g\|_u\leqslant\|I\|\ \|f\|_u,\quad 0\leqslant g\leqslant f,$$

故 $I^+(f)$ 是有界的. 不难验证，$I^+(f)$ 在 $C_0(X,\boldsymbol{R}^+)$ 上是线性的.

现在，对任意 $f\in C_0(X,\boldsymbol{R})$，由于 $f^+, f^-\in C_0(X,\boldsymbol{R})$，我们定义

$$I^+(f)=I^+(f^+)-I^+(f^-).$$

也易证 I^+ 在 $C_0(X,\boldsymbol{R})$ 上是线性的，有界的，且 $\|I^+\|\leqslant\|I\|$.

最后，令 $I^-=I^+-I$，易知 $I^-\in C_0(X,\boldsymbol{R})^*$，且 I^+ 与 I^- 都是 $C_0(X,\boldsymbol{R})$ 上的正线性泛函.

定理 4.3 设 $I\in C_0(X)^*$，则存在 $C_0(X)$ 上唯一的一组正有界线性泛函 I_1,I_2,I_3,I_4，使得

$$I = I_1 - I_2 + \mathrm{i}(I_3 - I_4).$$

并且存在有限 Radon 测度 μ_1,μ_2,μ_3,μ_4，使得

$$I(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\{(\mu_1 - \mu_2) + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)\}$$

对每个 $f\in C_0(X)$ 成立，这里 μ_i 是对应于 I_j 的正测度.

这个定理不难由引理 4.2 与定理 3.1 得到.

复 Radon 测度的 Riesz 表现定理如下：

定理 4.4 设 X 为 T_2 型局部紧空间，对于 X 上复 Radon 测度 $\mu\in M(X)$ 与函数 $f\in C_0(X)$，令

$$I_\mu(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu. \tag{4.1}$$

则映射 $\mu\rightarrow I_\mu$ 是 $M(X)$ 到 $C_0(X)^*$ 的等距同构.

证 由定理 4.3 知，每个 $I\in C_0(X)^*$ 具有 $I_\mu(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu$ 的形式；而对每个 $\mu\in M(X)$，相应的表示式(4.1)中的 $I_\mu\in C_0(X)^*$，这是因为由定理 4.2(3)，

$$\begin{aligned}|I_\mu(f)| &= \left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}|\mu| \\ &\leqslant \|f\|_u\,|\mu|(X) = \|f\|_u\|\mu\|,\end{aligned}$$

而且有 $\|I_\mu\| \leqslant \|\mu\|$. 进而，为得到 $\|\mu\| \leqslant \|I_\mu\|$，我们令 $h = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}|\mu|$，则据定理 4.2(1)，知 $|h| = 1$，$|\mu|$-a.e. 成立. 再据定理 3.5，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\varphi\in C_c(X)$，使得

$$\|\varphi\|_u \leqslant 1(= \|\bar{h}\|_u),$$

且 $\varphi=\bar{h}$ 在 $X-E$ 上成立，$|\mu|(E)<\varepsilon/2$. 这样

$$\begin{aligned}\|\mu\| &= \int_X |h|^2\mathrm{d}\mu = \int_X \bar{h}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \left|\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X (\varphi - \bar{h})\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leqslant \left|\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| + 2|\mu|(E) < \left|\int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| + \varepsilon,\end{aligned}$$

于是，$\|\mu\| \leqslant \|I_\mu\|$. 定理得证.

类似地，可以讨论 Radon 乘积测度并证明相应的 Fubini-Tonelli 定理，有兴趣的读者可自行完成.

§ 5 拓扑群，Haar 测度

Haar 测度是 1933 年由德国数学家 A. Haar 首先建立的，是 Lebesgue 测度的一种推广. 这种测度具有平移不变性，概括了一类具有刚性运动之"体积"不变的度量，是分析学、几何学，以及应用物理等许多学科中的重要工具. 本节中我们将讨论紧群与局部紧群上 Haar 测度的存在性与唯一性.

定义 5.1 设集合 G 的代数结构是一个群，拓扑结构是一个拓扑空间. 若 $G\times G$ 到 G 的映射 $(x,y)\to xy$ 与 G 到 G 的映射 $x\to x^{-1}$ 是连续的，则称 G 为拓扑群.

拓扑群的例子很多，如实数直线域 $\boldsymbol{R}$ 在加法运算与 $\boldsymbol{R}$ 的通常拓扑之下是一个拓扑群；复数域 $\boldsymbol{C}$ 在加法运算与 $\boldsymbol{C}$ 的通常拓扑之下是一个拓扑群；n 阶酉矩阵的全体在矩阵乘法运算与 $\boldsymbol{C}^{n^2}$ 拓扑之下是一个拓扑群，等等.

设 G 为拓扑群，e 为 G 的单位元. 若 A 与 B 为 G 的子集，我们定义 G 的子集 xA, Ax, AB, A^{-1} 如下：

$xA=\{xy\in G : y\in A\}, \quad x\in A;$

$Ax=\{yx\in G : y\in A\}, \quad x\in A;$

$AB=\{yz\in G : y\in A, z\in B\};$

$A^{-1}=\{x^{-1}\in G : x\in A\}.$

若 $A=A^{-1}$，则称 A 为 G 的对称子集.

拓扑群有如下基本性质.

性质 1 设 G 为拓扑群，我们有

(1) 对于任意固定的元 $a,b\in G$，映射

$$x\to x^{-1}, \quad x\to ax, \quad x\to axb$$

为 G 到 G 的同胚；而映射

$$x \to xax^{-1}$$

为 G 到 G 的连续映射.

（2）若 $\mathscr{B}$ 为单位元 e 的邻域滤系基，则

$$\mathscr{B}^{-1} = \{V^{-1} : V \in \mathscr{B}\}$$

也是 e 的邻域滤系基；对任意元 $a \in G$,

$$\{aV : V \in \mathscr{B}\} \quad 与 \quad \{Va : V \in \mathscr{B}\}$$

是 a 的邻域滤系基，分别称为 a 的左与右邻域滤系基.

证 （1）可由拓扑群的定义得到. 为证(2)，只需注意到当 A 为 G 的任一开子集时，aA 与 Aa 也是 G 的开集，就不难验证

$$a\mathscr{B} = \{aV : V \in \mathscr{B}\} \quad 与 \quad \mathscr{B}a = \{Va : V \in \mathscr{B}\}$$

为 a 的邻域滤系基了.

性质 2 设 G 为拓扑群，$\mathscr{U}$ 为单位元 e 的邻域滤系，则

（1）对每个 $U \in \mathscr{U}$，存在 $W \in \mathscr{U}$，使 $WW \subset U$；

（2）对每个 $U \in \mathscr{U}$，存在一个对称邻域 $V \in \mathscr{U}$，使 $V \subset U$；

（3）若 H 为 G 的子群，则其闭包 $\overline{H}$ 也是 G 的子群；

（4）群 G 的任一开子群也是它的闭子群；

（5）若 K_1 与 K_2 为 G 的紧子集，则 K_1K_2 也是其紧子集.

以上性质都可由定义与性质 1 得到.

定义 5.2 设 $f : G \to C$ 为拓扑群 G 上的函数，对于任意固定的元 $a \in G$，称函数 ${}_af(x) = f(ax)$ 为 f 的左平移，称 $f_a(x) = f(xa)$ 为 f 的右平移. 称 G 上的函数 f 为左一致连续，若对任给 $\varepsilon > 0$，存在 e 的邻域 V，使对所有 $y \in V$，下式成立

$$\| {}_yf - f \|_u < \varepsilon.$$

类似地可定义右一致连续.

使用§3 中的符号，$C_c(G)$ 为定义在 G 上的具有紧支集函数的全体.

性质 3 设 G 为拓扑群，若 $f \in C_c(X)$，则 f 是左一致连续的，也是右一致连续的.

证 我们只证明 f 的右一致连续性. 设 $f \in C_c(G)$，且 $K=\operatorname{supp}(f) \in \mathscr{K}$. 对于任意的 $x \in K$，存在 e 的邻域 U_x，使

$$|f_y(x) - f_e(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad y \in U_x.$$

据性质 2 中(1)与(2)，存在 e 的对称邻域 V_x，使 $V_xV_x \subset U_x$. 显然 $\{xV_x\}_{x \in K}$覆盖 K，故存在 $x_1, \cdots, x_n \in K$，使

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} x_j V_{x_j}.$$

令

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}.$$

现在，对任意 $x \in G$，若 $x \in K$，则存在一个 $j, j \in \{1, \cdots, n\}$，使得 $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$. 于是当 $y \in V$ 时，有

$$\begin{aligned} |f_y(x) - f_e(x)| &\leqslant |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

这是因为

$$xy \in (x_j V_{x_j})V \subset x_j V_{x_j} V_{x_j} \subset x_j U_{xj}.$$

若 $x \notin K$，且 $y \in V$，则

$$f(x) = 0,\ f(xy) = 0 \quad 或 \quad f(x) = 0, \quad x_j^{-1}xy \in V_{x_j}$$

对某个 $j \in \{1, \cdots, n\}$成立. 在前一情形有 $|f_y(x) - f_e(x)| < \varepsilon$. 对后一情形，由 $x_j^{-1}x = x_j^{-1}xyy^{-1} \in U_{x_j}$，得到

$$|f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此也得到 $|f_y(x) - f_e(x)| < \varepsilon$. 故 f 为右一致连续.

性质 4 设 G 为拓扑群，我们有

(1) 若 G 是 T_1 型的，则 G 也是 T_2 型的(它还是 T_3 型的，见参考书目[7]).

(2) 若 H 为 G 的正规子群，则商群 G/H 为 T_2 型拓扑群，当且仅当 H 为 G 的闭子群. 特别地，若 $H=\overline{\{e\}}$，则 G/H 为 T_2 型拓

扑群.

证 (1) 若 G 为 T_1 型拓扑群,对于 $x,y\in G$,且 $x\neq y$,存在 e 的对称邻域 V,使 $xy^{-1}\notin VV$. 由此可推出

$$Vx\cap Vy=\varnothing.$$

因若不然,取 $z\in Vx\cap Vy$,则存在 $\nu_1,\nu_2\in V$,使得

$$z=\nu_1 x,\quad z=\nu_2 y.$$

从而

$$xy^{-1}=\nu_1^{-1}zz^{-1}\nu_2=\nu_1^{-1}\nu_2\in V^{-1}V=VV.$$

由此知 G 为 T_2 型拓扑群.

(2) 由于商群 $G/H=\{xH:x\in G\}$ 为 G 中陪集 $xH=\{y\in G:x^{-1}y\in H\}$ 的全体,代数结构为乘法

$$(xH)(yH)=xyH$$

之下的群,拓扑结构则是商空间结构,商映射为 $\pi:x\rightarrow xH$. 易知 G/H 是一个拓扑群. (2)的必要性得证.

为证明(2)的充分性,设 G/H 为 T_2 型的. 于是,它的单位元 $\pi(e)$ 所成的单点集 $\{\pi(e)\}$ 为闭集. 因为商映射 π 为连续映射,故 $\pi^{-1}(\{\pi(e)\})=H$ 为 G 中闭集.

反之,若 H 为 G 的闭子群,则补集 $\mathscr{C}H$ 为 G 中的开集. 由于商映射 π 为 G 到商群 G/H 的开映射,故 $\pi(\mathscr{C}H)$ 为 G/H 的开子集. 补集的等式

$$\pi(\mathscr{C}H)=G/H-\{\pi(e)\}$$

表明 $\{\pi(e)\}$ 是 $\pi(\mathscr{C}H)$ 在 G/H 中的补集,从而 $\{\pi(e)\}$ 是 G/H 中的闭集. 据拓扑群的性质(本章习题 38),知 G/H 为 T_2 型的. 性质 4 得证.

拓扑群还有一些其他有趣的性质,我们不一一列举,读者可参看本章习题与参考书目[8].

下面讨论局紧 T_2 型拓扑群上的 Haar 测度的存在性与唯一性.

定义 5.3 设 G 为 T_2 型的局部紧拓扑群,以下简称局部紧

群. 可测空间$(G,\mathscr{R}_\sigma)$上的非负测度μ称为左 Haar 测度,若对任意$x\in G$与$E\in\mathscr{R}_\sigma$,有$\mu(xE)=\mu(E)$. 称$\mu(xE)=\mu(E)$为μ的左平移不变性. 类似地可定义右 Haar 测度.

定理 3.1 启发我们,为了建立 Haar 测度,只需在$C_c(G)$上给出正线性泛函,使它具有所要求的平移不变性.

定义 5.4 设G为局部紧群. 我们称$C_c(G)$上的正线性泛函I为其上的左 Haar 积分,若I满足

(1) 对$f\in C_c(G)$,$f>0$蕴涵$I(f)>0$;

(2) 对$f\in C_c(G)$,$f\neq 0$及$a\in G$,有$I({}_af)=I(f)$,

其中${}_af(x)=f(ax)$为f的左平移,因此 Haar 积分又称为左平移不变积分.

类似地可定义$C_c(G)$上的右 Haar 积分(右平移不变积分).

现在给出局部紧群上 Haar 积分的存在与唯一性定理.

定理 5.1 设G为T_2型局部紧群,则存在$C_c(G)$上的左(右) Haar 积分. 若不计常数因子,这个积分是唯一的.

此定理的证明是很有技巧性的,而且难度较大. 在证明中,多次使用泛函方程与函数方程之间的互化的技巧以及处理集合之间关系的方法. 但是,由于内容太专,而且所占篇幅太大,我们仅对G为紧群的情形叙述其证明大意.

设G为紧拓扑群,简称紧群. 对于G的任意紧子集K,取G的单位元e的开邻域V,则$\{xV:x\in G\}$形成K的开覆盖

$$K\subseteq\{xV:x\in G\}.$$

于是,存在K的有限覆盖$\{x_jV:j=1,2,\cdots,m,\}\supseteq K$.

令$(K:V)$为使上述有限覆盖成立的最小整数,即存在最小整数$n=(K:V)$,使得

$$K\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}x_jV.$$

选定一个具有非空内部的紧集K_0作为度量G中集合的"尺度". 于是任意紧集$K\subseteq G$关于单位元e的每个开邻域V的"近似

尺度”可用比值

$$\frac{(K:V)}{(K_0:V)} \tag{5.1}$$

表示.显见,当 V 取得越小时,(5.1)式中的比值就越能代表 K 的“精确尺度”.因此,令 V 向 e 收缩,可以证明(5.1)式中比值的“极限”存在,记为 μK,并可证明这样构造的 μ 是 G 的 Borel 集类上的左(右)平移不变测度,称为左(右)Haar 测度.这里用引号“·”表示的词都是需要给出严格定义的,而结论的证明也有很高的技巧(见参考书目[5]和[8]).

Haar 测度有如下一些有用的性质.它们的证明留给读者.

定理 5.2 设 G 为 T_2 型局部紧群,我们有

(1) 若 μ 为 G 上的 Haar 测度,则对 G 的所有非空开集 U,有 $\mu(U)>0$;而对所有 $f\in C_c^+(G)$,下面积分成立:

$$\int_G f\mathrm{d}\mu > 0.$$

(2) 若 μ 为 G 上的左 Haar 测度,则 $\mu(G)<+\infty$,当且仅当 G 为紧群.

定义 5.5 设 I 为 $C_c(G)$上的左 Haar 积分,对于 $f\in C_c^+(G)$,$f\neq 0$ 与 $x\in G$,令

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)},$$

称 $\Delta(x)$为 G 的模函数.

定理 5.3 模函数 $\Delta(x)$仅依赖于 x,而与 f,I 无关,它是 G 上的连续正函数,且满足

$$\Delta(x,y) = \Delta(x)\Delta(y), \quad x,y\in G.$$

定理 5.4 每个紧群 G 是幺模的,亦即 $\Delta(x)\equiv 1$.

定理 5.5 设 I 为左 Haar 积分,则对每个 $f\in C_c(G)$,有

$$I(f) = I\left(\frac{1}{\Delta}\tilde{f}\right).$$

这里 $\tilde{f}(x)=f(x^{-1})$.

定理 5.6 设 μ 为由 $C_c(G)$上的左 Haar 积分确定的 G 上的左 Haar 测度，则 $\tilde{\mu}(E)\equiv\mu(E^{-1})$为 G 上的右 Haar 测度，并且有

$$\mathrm{d}\,\tilde{\mu}=\Delta(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$$

转而给出 Haar 积分的几个例.

例 5.1 设 $G=(\boldsymbol{R}^n,+)$;这里 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,G 是关于 $\boldsymbol{R}^n$ 中元的加法的 Abel 群,其上的 Haar 积分就是通常的 Lebesgue 积分

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{d}m(x).$$

例 5.2 设 G 为有限群,其阶为 r,则线性泛函

$$I(f)=\frac{1}{r}\sum_{x\in G}f(x)$$

是 G 上的左与右 Haar 积分. G 的任意子集 A 的 Haar 测度是

$$\lambda(A)=\frac{1}{r}\overline{\overline{A}},$$

这里 $\overline{\overline{A}}$ 是 A 的势.

例 5.3 设 $\boldsymbol{R}^+=(0,+\infty)$. 则 $G=(\boldsymbol{R}^+,\circ)$是一个局部紧群. 若考虑

$$J(f)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x,\quad f\in C(G),$$

它虽然是一个正线性泛函,但却不是左或右不变的.

事实上,若取 $y\in\boldsymbol{R}^+$,则

$$J({}_yf)=\int_0^\infty f(yx)\mathrm{d}x=y^{-1}\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=y^{-1}J(f).$$

然而,若令

$$I(f)=\int_0^\infty f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

则 I 是 G 上的左与右 Haar 积分. 因为,例如取 $y\in\boldsymbol{R}^+$. 我们有

$$I({}_yf)=\int_0^\infty f(yx)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=I(f).$$

例 5.4 设 $G=(\boldsymbol{R}^+\times T,\circ)$,这里 $T=\{\mathrm{e}^{2\pi i x}:0\leqslant x<1\}$. 取

极坐标，可得线性泛函

$$I(f) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

变换为直角坐标 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，上述泛函化为

$$I(f) = \int_{\boldsymbol{R}^+}\int_{\boldsymbol{R}^+} \frac{f(z)}{|z|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

它是 G 上的左与右 Haar 积分.

例 5.5 设

$$G = GL(n,\boldsymbol{R}) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \boldsymbol{R}, \det A \neq 0\},$$

取矩阵乘法为 G 的乘法，$\boldsymbol{R}^{n^2}$ 拓扑为 G 的拓扑，则 G 成为 T_2 型拓扑群，并且是局部紧的. 这时，我们令 $M=\boldsymbol{R}^{n^2}$，$J=(t_{ij})\in G$，则

$$I(f) = \int_M f(T)\mathrm{d}T$$

形成 G 上的正积分，但它却不是 Haar 积分(注意这时 G 的运算是矩阵的乘法).

为寻找 G 上的左 Haar 积分，考虑到

$$I(Uf) = |\det U|^n I(f),$$

不难证明

$$J(f) = \int_G \frac{f(T)}{|\det T|^n}\mathrm{d}T$$

为 G 上的左 Haar 积分.

习 题

1. 若 μ^* 为 $\mathscr{P}(X)$ 上的外测度，$\{A_j\}_1^{\infty}\subset\mathscr{P}(X)$ 为互斥的 μ^* 可测集. 试证：对于任何 $E\subset X$，有

$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A_j).$$

2. 若 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 为一个代数. 设

$$\mathscr{A}_\sigma = \left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j : A_j\in\mathscr{A}\right\}, \quad \mathscr{A}_{\sigma\delta} = \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k : B_k\in\mathscr{A}_\sigma\right\}.$$

我们称 $\mathscr{A}$ 上的集函数 $\mu: \mathscr{A}\to[0,+\infty]$为 $\mathscr{A}$ 上的准测度,若

(a) $\mu\varnothing=0$;

(b) 若 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$ 为互斥集列,使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{A}$,则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu A_j.$$

对于 $E\in\mathscr{P}(X)$,我们称

$$\mu^* E=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu A_j: A_j\in\mathscr{A}, E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right\}$$

为 E 的外测度. 试证:

(1) 对任意 $E\in\mathscr{P}(X)$与任意 $\varepsilon>0$,存在 $A\in\mathscr{A}_\sigma$,且 $E\subset A$,使不等式 $\mu^* A\leqslant\mu^* E+\varepsilon$ 成立.

(2) 若 $\mu^* E<+\infty$,则 E 为 μ^* 可测,当且仅当存在 $B\in\mathscr{A}_{\sigma\delta}$,且 $E\subset B$,使得 $\mu^*(B\setminus E)=0$.

3. 用习题 2 的记号. 若 $\mu^* X<+\infty$,对于 $E\subset X$,定义内测度为 $\mu_* E=\mu^* X-\mu^*(\mathscr{C}E)$. 试证: E 为 μ^* 可测,当且仅当

$$\mu^* E=\mu_* E.$$

4. 设$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间. 令

$$\mathscr{N}=\{N\in\mathscr{R}_\sigma: \mu N=0\},$$

$$\mathscr{M}=\{E\cup F: E\in\mathscr{R}_\sigma, F\subset N \text{ 对某个 } N\in\mathscr{N}\}.$$

试证: $\mathscr{M}$ 为 σ 代数,并且存在唯一的测度 $\bar{\mu}$,使 $\bar{\mu}$为 μ 在 $\mathscr{M}$ 上的扩张,而且 $\bar{\mu}$为 $\mathscr{M}$ 上的完全测度.

5. 试证: 若 $\mathscr{R}$ 为环,且也为单调类,则 $\mathscr{R}$ 必为 σ 环.

6. 若$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间,试证: 对 $E,F\in\mathscr{R}_\sigma$,有

$$\mu E+\mu F=\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F).$$

又若任取 $E\in\mathscr{R}_\sigma$,令 $\nu(A)=\mu(A\cap E)$, 这里 $A\in\mathscr{R}_\sigma$ 为任一集. 试证: ν 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的一个测度.

7. 若$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间,且 $\mu X=1$. 若 μ^* 为由 μ 诱导的外测度. 又设 X 的子集 E 满足 $\mu^* E=1$. 试证: 对于 $A,B\in\mathscr{R}_\sigma$ 且

$A\cap E=B\cap E$，有 $\mu A=\mu B$.

8. 若$(X,\mathscr{R}_\sigma)$为可测空间，试证：

(1) 若 $f: X\to[0,+\infty]$为可测函数，则存在 X 上的简单函数列$\{\varphi_n\}$，使得

$$0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots\leqslant f,$$

且 $\lim\limits_n\varphi_n(x)=f(x), x\in X$，并且在使 f 有界的任一集合上，上述收敛是一致的.

(2) 若 $f: X\to\boldsymbol{C}$ 为可测函数，则存在 X 上的简单函列$\{\varphi_n\}$，使

$$0\leqslant|\varphi_1|\leqslant|\varphi_2|\leqslant\cdots\leqslant|f|,$$

且 $\lim\limits_n\varphi_n(x)=f(x), x\in X$，并且在使 f 有界的任一集合上，上述收敛是一致的.

9. 设$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间，$\mu$ 为完全测度，试证：

(1) 若 f 可测，且 $f=g$，μ-a.e. 成立，则 g 可测；

(2) 若函数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 可测，且 $f_n\to f$，μ-a.e. 成立，则 f 可测.

若 μ 不是完全的，上述两个结论是否成立？

10. 试证定理 1.8～定理 1.12.

11. 试证：若$\{f_n\}\subset L^+(\mu)$，$f\in L^+(\mu)$，且 $f_n\to f$，μ-a.e. 成立，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu\leqslant\inf\lim\int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

12. 若 $f\in L^+(\mu)$，则 $\mu\{x\in X: f(x)=\infty\}=0$，且集$\{x\in X: f(x)>0\}$是 σ 有限的. 试证明之.

13. 试证：若 $f\in L^+(\mu)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $E\in\mathscr{R}_\sigma$，且 $\mu E<+\infty$，使

$$\int_E f\mathrm{d}\mu>\int_X f\mathrm{d}\mu-\varepsilon.$$

14. 设$(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$为测度空间，$L(\mu)\equiv L(X,\mu)$为 X 上复值 μ

可积函数空间. 试证：

(1) 若 $f\in L(\mu)$，则 $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ 为 σ 有限的；

(2) 若 $f,g\in L(\mu)$，则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu$$

对于所有的 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 成立，当且仅当

$$\int_X |f-g|\mathrm{d}\mu = 0,$$

也当且仅当 $f=g$，μ-a. e..

15. 设 $\{f_j\}\subset L(\mu)$，且满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_X |f_j|\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

试证：$\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$ 几乎处处收敛于一个 $L(\mu)$ 函数，并且下式成立

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\int_X f_j\mathrm{d}\mu.$$

16. 设 $\{f_n\}\subset L(\mu)$. 试证：

(1) 若 $\| f_n - f \|_{L(\mu)}\to 0$，则 f_n 测度收敛于 f.

(2) 若 $\| f_n - f \|_{L(\mu)}\to 0$，则存在子序列 $\{f_{n_j}\}$，使得 $f_{n_j}\to f$，μ-a. e..

17. 试证：若 f_n 测度收敛于 f，且 $f_n\geqslant 0$，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \leqslant \inf\lim \int_X f_n\mathrm{d}\mu.$$

18. 设 $|f_n|\leqslant g\in L(\mu)$，且 f_n 测度收敛于 f. 试证：

(1) $\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim\limits_n \int_X f_n\mathrm{d}\mu$;

(2) $\| f_n - f \|_{L(\mu)}\to 0$.

19. 设 $X=Y=\{1,2,3,\cdots\}\equiv N$，$\mathscr{R}_\sigma=\mathscr{S}_\sigma=\mathscr{P}(N)$，$\mu=\nu$ 为计数测度(§1 中例 1.4). 定义

$$f(m,n)=\begin{cases} 1, & m=n, \\ -1, & m=n+1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试证：$\int_Y\int_X f\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$ 与 $\int_X\int_Y f\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu$ 都存在并且相等，但是

$$\int_{X\times Y}|f|\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\infty.$$

20. 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{S}_\sigma,\nu)$ 为两个测度空间，试证：

(1) 设 $f: X\to \boldsymbol{C}$ 为 μ 可测函数，$g: Y\to\boldsymbol{C}$ 为 ν 可测函数. 若 $h(x,y)=f(x)g(x)$，则 h 为 $\mu\times\nu$ 可测的.

(2) 若 $f\in L(\mu)$，$g\in L(\nu)$，则 $h\in L(\mu\times\nu)$，且

$$\int_{X\times Y}h\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\left\{\int_X f\mathrm{d}\mu\right\}\left\{\int_Y g\mathrm{d}\nu\right\}.$$

21. 试证：若 P_j 关于广义测度 ν 为 ν-正集，$j=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}P_j$ 也是 ν-正集.

22. 设 μ 为广义测度，试证：$\nu(E)=0$，当且仅当

$$|\nu|(E)=0.$$

23. 设 μ 与 ν 为广义测度，试证：$\nu\perp\mu$，当且仅当 $|\nu|\perp\mu$，也当且仅当 $\nu^+\perp\mu$，也当且仅当 $\nu^-\perp\mu$.

24. 设 μ 为可测空间 $(X,\mathscr{M})$ 上的广义测度，试证：

(1) $L(\mu)=L(|\mu|)$；

(2) 若 $f\in L(\mu)$，则 $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_X|f|\mathrm{d}\mu$；

(3) 若 $E\in\mathscr{M}$，则

$$|\mu|(E)=\sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| : |f|\leqslant 1\right\}.$$

25. 设 μ 为正测度，ν 为广义测度，试证：$\nu\ll\mu$，当且仅当 $|\nu|\ll\mu$，也当且仅当 $\nu^+\ll\mu$ 与 $\nu^-\ll\mu$. 又设 $\nu\perp\mu$ 且 $\nu\ll\mu$，试证

$$\nu=0.$$

26. 设 X 为 T_2 型局部紧空间. 试证：若 I 是 $C_c(X)$ 上的线性泛函，$K\subset X$ 为 X 的紧子集，则存在常数 M_K，使对所有 $\mathrm{supp}(f)\subset K$ 的函数 $f\in C_c(X)$，有

$$|I(f)|\leqslant M_k\|f\|_u.$$

27. 设 X 为 T_2 型局部紧空间，试证：

(1) 若 $f\in C_c(X)$，$f\geqslant 0$，则 $f^{-1}([a,+\infty))$ 对所有 $a>0$ 是一个紧 G_δ 型集.

(2) 若 $K\subset X$ 为紧 G_σ 型集，则存在 $f\in C_c(X)$，$0\leqslant f\leqslant 1$，使得 $K=f^{-1}(\{1\})$.

28. 试证：若 μ 是 X 上的 Radon 测度，则 μ 在 X 的所有 σ 有限集上是内正则的.

29. 试证：X 上的每个 σ 有限 Radon 测度是正则的. 又若 X 是 σ 紧空间，则 X 上的任一 Radon 测度是正则的.

30. 试证定理 3.2(2)与定理 3.5.

31. 设 μ 为 Radon 测度，$f\in L(\mu)$. 试证：

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$$

也是 Radon 测度.

32. 设 μ 为 Radon 测度，$\varphi\in C(X)$，$\varphi\geqslant 0$. 试证：

$$\nu(E)=\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu$$

也是 Radon 测度.

33. 试证：对于复测度 ν，定义 4.4 中给出的全变差 $|\nu|$ 不依赖于 f 与 μ 的选择，并且证明 $|\nu|$ 是一个满足 $|\nu|(X)<+\infty$ 的正测度.

34. 若 ν_1 与 ν_2 为 $(X,\mathscr{M})$ 上的复测度. 试证：

$$|\nu_1+\nu_2|\leqslant|\nu_1|+|\nu_2|.$$

又若 λ 为正测度，则 $\nu_1\perp\nu_2$，当且仅当 $|\nu_1|\perp|\nu_2|$；$\nu\ll\lambda$，当且仅当 $|\nu|\ll\lambda$.

35. 若 ν 为 $(X,\mathscr{M})$ 上的复测度，且 $\nu(X)=|\nu|(X)$ 成立，试证：$\nu=|\nu|$.

36. 试证：若 μ 是复 Borel 测度，则 μ 是 Radon 测度当且仅当 $|\mu|$ 是 Radon 测度. 并证明 $M(X)$ 是线性空间，可以赋于范数

$\|\mu\|$.

37. 试证：若 X 是紧空间，则 $C(X)^*$ 与 $M(X)$ 是等距同构的.

38. 设 G 为拓扑群，试证：G 是 T_2 型的，当且仅当其单位元所生成的单点集 $\{e\}$ 是闭集.

39. 设 G 为拓扑群，A,B 为 G 的子集，试证：闭包 $\overline{A},\overline{B}$ 有如下性质：

(1) $(\overline{A})(\overline{B})=(\overline{AB})$；

(2) $(\overline{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}})$；

(3) $x\overline{A}y=(\overline{xAy})$.

40. 设 G 为拓扑群，H 为其子群. 试证：商映射 $\pi: G\to G/H$ 为开映射. 又证明，若 H 是紧子群，则商映射 $\pi: G\to G/H$ 也是闭映射.

41. 试证：拓扑群 G 的子群是开子群，当且仅当 H 有非空内部. 又证明，G 的开子群是闭的.

42. 设 G 为 T_2 型局部紧群，若 G 为 Abel 群，试证：G 为幺模的.

43. 对于 T_2 型局部紧群，定义

$$[G,G]=\overline{\{xyx^{-1}y^{-1}: x,y\in G\}},$$

即所有形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的元所生成的集的闭包，称为 G 的交换子群. 试证：

(1) $[G,G]$ 为 G 的正规子群；

(2) 若 $G/[G,G]$ 为有限集，则 G 是幺模的.

44. 试证定理 5.3～定理 5.6.

第四章　广义函数(分布)与 Fourier 变换

本章以对偶理论为基础讨论广义函数与 Fourier 变换. 在介绍拓扑线性空间与局部凸空间的主要性质之后,定义一般线性空间的对偶空间与对偶拓扑. 应用上述一般理论,较为详细地研究分布空间及其基本性质,特别是它的拓扑结构和运算,包括卷积与微分等. 然后,讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Fourier 变换,以展示 Fourier 分析的一般模式. 作为应用,我们给出常系数线性偏微分方程的基本解. 最后证明 Wiener-Paley-Schwartz 定理.

§1　拓扑线性空间,局部凸空间

设 X 为基本集,若 X 是数域 $\mathbb{K}$($\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$)上的线性空间,同时也是一个拓扑空间. 一般地说,这两种结构之间不必有什么关系. 但如果 X 的代数运算在其拓扑结构之下是连续的,就会给 X 带来很多有趣且重要的性质. 本节所讨论的拓扑线性空间就是这样的例子.

定义 1.1　设数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 X 同时也是一拓扑空间. 我们称 X 的线性空间结构与其拓扑结构是协调的,如果积空间 $X\times X$ 到 X 的映射 $(x,y)\to x+y$ 与数乘空间 $\mathbb{K}\times X$ 到 X 的映射 $(\lambda,x)\to\lambda x$ 是连续的.

当 X 的线性空间结构与其拓扑结构相协调时,称 X 为拓扑线性空间.

不难看出,拓扑线性空间 X 关于加法运算成为一个拓扑群,因此下面常会引用第三章 §5 中关于拓扑群的结论.

赋范线性空间是拓扑线性空间. 下面给出一个既是线性空间

又是拓扑空间,但却不是拓扑线性空间的例子.

设 $X=C$ 为复平面. 则 X 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间,同时也是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间. 令 $p(\lambda)=|\mathrm{Im}\lambda|$,$\lambda\in X$,赋予 X 以如下拓扑结构:

对每个 $\mu\in X$,任给 $\varepsilon>0$,令 $U_\varepsilon(\mu)=\{\lambda\in X: p(\lambda-\mu)<\varepsilon\}$,作 X 中的集族 $\mathscr{U}=\{U_\varepsilon(\mu): \mu\in X\}$,以 $\mathscr{U}$ 为 μ 的邻域滤系基,使 X 成为一个拓扑空间,其拓扑记为 τ. 则

(1) X 的实线性空间结构与 τ 相协调;

(2) X 的复线性空间结构与 τ 不协调.

(1)与(2)的验证留作习题.

有一个判别线性空间结构与拓扑结构相协调的充要条件(见参考书目[2]).

定理 1.1 设 X 为数域 $\mathbf{K}$($\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{R}$)上的线性空间,θ 为 X 的零元,τ 为 X 的拓扑,则 X 的线性空间结构与拓扑结构协调,当且仅当下列诸条成立:

(1) τ 与 X 的加群结构相协调,即映射 $(x,y)\to x+y$ 与 $x\to -x$ 连续;

(2) 对每个 $x\in X$,映射 $\lambda\to\lambda x$ $(\lambda\in\mathbf{K})$在 $\lambda=0$ 连续;

(3) 对每个 $\lambda\in\mathbf{K}$,映射 $x\to\lambda x$ $(x\in X)$在 $x=0$ 连续;

(4) 映射$(\lambda,x)\to\lambda x$ 在$(0,\theta)$连续.

由此定理可知,拓扑线性空间的零元 θ 的邻域滤系(或基)决定了整个空间的邻域滤系(或基). 为此,我们仅需给出 θ 的邻域滤系(或基). 进而,任一个拓扑线性空间的零元 θ 必存在由闭的、均衡的、吸收的邻域组成的邻域滤系基.

定义 1.2 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,$A\subset X$ 为 X 的子集. 若对任意 $x\in A$ 与 $\lambda\in\mathbf{K}$,且 $|\lambda|\leqslant 1$,都有 $\lambda x\in A$,则称 A 为均衡集. 或等价地表示为:$|\lambda|\leqslant 1$ 蕴涵 $\lambda A\subset A$.

X 的任一子集 S 未必均衡. 我们称包含 S 的最小均衡集(亦即包含 S 的一切均衡集的交)为 S 的均衡包. 记为 $\mathrm{bal}S$.

若 $S\subset X$ 为 X 的子集.我们称包含 S 的最小闭均衡集为 S 的闭均衡包.

若 S 为 X 的子集，且对每个 $x\in X$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ 时，有 $\lambda x\in S$，则称 S 为吸收集.

我们有如下定理(见参考书目[2]).

定理 1.2 数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间 X 的零元 θ 有一个由闭的、均衡的、吸收的集组成的邻域滤系基.

下面的定理表明，上述性质也是 θ 的邻域滤系基的特征性质.

定理 1.3 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一个滤系基，且满足：

(1) 若 $V\in\mathscr{B}$，则 V 是均衡、吸收集；

(2) 若 $V\in\mathscr{B}$，$\lambda\in\mathbb{K}$，且 $\lambda\neq0$，则 $\lambda V\in\mathscr{B}$；

(3) 若 $V\in\mathscr{B}$，则存在 $W\in\mathscr{B}$，使 $W+W\subset V$.

那么在 X 上存在一个拓扑 τ，使 X 成为拓扑线性空间，而 $\mathscr{B}$ 就是它的零元 θ 的邻域滤系基.

拓扑线性空间是赋范线性空间概念的推广，因此在赋范线性空间中的一些重要概念与定理，例如，有关超平面、拓扑直和、准紧性、Hahn-Banach 扩张定理、Riesz 定理等也将在拓扑线性空间中得到推广.有兴趣的读者可自行完成(参看参考书目[2]和[7]).

局部凸拓扑线性空间，简称为局部凸空间，是拓扑线性空间中极为重要的一种.到目前为止，可以说拓扑线性空间理论中相当大一部分的成就都是关于局部凸空间的.而且，局部凸空间具有广泛的应用.在本书中，我们不打算介绍一般结果，读者可以参考有关泛函分析方面的专著，我们只介绍有关的基本知识.

先介绍凸性.

定义 1.3 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，A 为 X 的子集.若对 A 中的任意两个元 $x,y\in A$，以 x,y 为端点的“线段”

$$T=\{t\in X: t=\alpha x+(1-\alpha)y,\ 0\leqslant\alpha\leqslant1\}$$

含于 A，则称 A 为凸集.今后约定空集为凸集.

我们称包含 X 的子集 S 的最小凸集为 S 的凸包，记为 $\mathrm{conv}S$.

对于 X 中给定的一组元 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$，我们称 X 中的元

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

为 $x_1, \cdots, x_n$ 的凸组合，其中

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

定义 1.4 数域 $\mathbf{K}$ 上的拓扑线性空间 X 称为局部凸的，若 X 的每一点 x 都有一个凸邻域滤系基. 或等价地，若 X 的零元 θ 有一个凸邻域滤系基.

赋范空间是局部凸的，因为以 θ 为中心的开球就是 θ 的凸邻域滤系基.

定理 1.4 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的局部凸空间，则其零元 θ 有一个凸的、闭的、均衡的、吸收的邻域滤系基.

证 任取 θ 的邻域 U，可以证明，存在 θ 的邻域 $V \subset U$，使得 V 是凸、闭、均衡、吸收的. 我们简述寻找 V 的思路.

对于 U，取 U_1 为 θ 的闭邻域，使 $U_1 \subset U$. 其次，由 X 为局部凸空间，取 U_2 为 θ 的凸邻域，使 $U_2 \subset U_1$. 再取 U_3 为 θ 的闭均衡邻域，使 $U_3 \subset U_2$. 令 $W = \mathrm{conv}U_3$，易证 W 为凸均衡集. 显然 $\overline{W}$ 也是凸集. 最后，令 $V = \overline{W}$，则 V 是凸、闭、均衡、吸收集，且

$$\begin{aligned} V = \overline{W} &= \overline{\mathrm{conv}U_3} \subset \overline{\mathrm{conv}U_2} \subset \overline{\mathrm{conv}U_1} \\ &= \overline{U}_2 \subset \overline{U}_1 = U_1 \subset U. \end{aligned}$$

定理得证.

下面的定理表明上述性质也是局部凸空间的零元的邻域滤系基的特征性质.

定理 1.5 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一个滤系基，并满足：

(1) 若 $V \in \mathscr{B}$，则 $\theta \in V$；

(2) 若 $V \in \mathscr{B}$，则 V 是凸、均衡、吸收集.

那末，$\mathscr{B}'=\{\alpha V:\alpha>0,V\in\mathscr{B}\}$为 X 的零元 θ 的邻域滤系基，并且由 $\mathscr{B}'$ 决定的拓扑 τ 使 X 成为局部凸空间.

证 $\mathscr{B}'$ 显然是一个滤系基. 我们先证明 $\mathscr{B}'$ 决定的拓扑 τ 使得 X 成为一个拓扑线性空间. 为此只需验证它满足定理 1.3 的三个条件.

若 $U=\alpha V\in\mathscr{B}'$，$\alpha>0$，$V\in\mathscr{B}$，则因 V 是均衡集，故对于满足 $|r|\leqslant 1$ 的任意元 $r\in\mathbb{K}$，有 $rV\subset V$. 于是，由

$$r(\alpha V)=\alpha(rV)\subset\alpha V$$

知 $U=\alpha V$ 为均衡集. 又因 V 是吸收集，故对每个 $x\in X$，存在 $\varepsilon_0>0$，使当 $|\lambda|\leqslant\varepsilon_0$ 时，有 $\lambda x\in V$. 于是，对于 $\alpha>0$，取

$$\varepsilon=\alpha\varepsilon_0>0,$$

则当 $|\lambda|\leqslant\varepsilon$ 时，$(\lambda/\alpha)x\in V$，从而 $\lambda x\in\alpha V$，因此 $U=\alpha V$ 为吸收集. 定理 1.3 的条件(1)满足.

若 $U=\alpha V\in\mathscr{B}'$，$\alpha>0$，$V\in\mathscr{B}$，对于 $\lambda\in\mathbb{K}$ 且 $\lambda\neq 0$，由 $\lambda V\in\mathscr{B}$，有

$$\lambda(\alpha V)=\alpha(\lambda V)\in\mathscr{B}'.$$

定理 1.3 的条件(2)满足.

若 $U=\alpha V\in\mathscr{B}'$，$\alpha>0$. 因为 $V\in\mathscr{B}$，V 为凸集，故令 $W=V/2$，易见 $W+W\subset V$，于是

$$\alpha W+\alpha W=\alpha(W+W)\subset\alpha V.$$

这样 $\mathscr{B}'$ 满足定理 1.3 的条件(3).

于是，$\mathscr{B}'$ 决定的拓扑 τ 使 X 成为拓扑线性空间. 显然它是一个局部凸空间，因为 V 的凸性蕴涵 $U=\alpha V$ 的凸性. 定理得证.

局部凸空间的构造与半范数有密切关系.

定义 1.5 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$p(x)$是 X 到$[0,\infty)$上的实值函数，若 $p(x)$满足：

(1) 非负性：$p(x)\geqslant 0$，$x\in X$；

(2) 半可加性：$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$x,y\in X$；

(3) 绝对齐性：$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，$x\in\mathbb{K},x\in X$，

则称 $p(x)$ 为 X 上的半范数. 显然,半范数为范数,当且仅当 $p(x)=0$ 时有 $x=\theta$.

定理 1.6 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,p 是 X 上的半范数,则

(1) 集合

$$B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\} \quad 与 \quad U = \{x \in X : p(x) < 1\}$$

都是 X 中的均衡的、凸集.

(2) $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y)$, $x,y \in X$.

进而,当 X 为拓扑线性空间且 p 在 $x=0$ 连续时,则还有

(3) p 在 X 上一致连续.

(4) B 是 X 中的闭集,U 是 X 中的开集,且

$$B = \overline{U}, \quad U = \mathring{B}.$$

证 (1)～(3)可由定义经简单演算推得. 我们仅证(4).

由于 $B=\{x\in X : p(x)\leqslant 1\}=p^{-1}([-1,1])$,据 p 的连续性与$[-1,1]$是闭集,便知 B 为 X 中的闭集. 又由 $U=p^{-1}((-1,1))$,因此 U 为 X 中的开集.

因 $U\subset B$,故 $\overline{U}\subset\overline{B}=B$. 反之,任取 $x\in B$,对任一个满足 $0<\alpha<1$ 的 α,由

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \leqslant \alpha < 1,$$

得 $\alpha x\in U$. 进而,取 α_n,使得 $0<\alpha_n<1$ 且 $\alpha_n\to 1$,据映射 $\alpha\to\alpha x$ 的连续性,知 $\alpha_n x \to x$,故 $x\in\overline{U}$. 于是 $B\subset\overline{U}$. 从而得到 $B=\overline{U}$.

最后,由 $B=\overline{U}$ 得 $\mathring{B}=\mathring{\overline{U}}=U$. 定理得证.

由此定理,如果 $p(x)$ 是拓扑线性空间 X 的连续半范数,则

$$B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$$

可视为 X 中的"闭单位球". 事实上,它是一个均衡的、有非空内部 $\mathring{B}=U$ 的闭凸集.

定义 1.6 拓扑线性空间 X 的具有非空内部的闭凸子集称为 X 中的凸体.

于是,由定理 1.6 知,X 上的半范数 p 所决定的集 B 是 X 的均衡凸体. 有意义的是,其逆也成立,即:

定理 1.7 设 X 为数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，B 为 X 中的一个均衡凸体. 则存在 X 上的唯一的半范数 p，使得

$$B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\},$$

并且 p 在 X 上一致连续，B 的内部为

$$\mathring{B} = \{x \in X : p(x) < 1\}.$$

证明可参看参考书目[2].

下面我们利用半范数来确定局部凸空间的拓扑结构.

定理 1.8 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，p 为 X 上的半范数. 则

(1) 存在 X 上的拓扑 τ_p，与 X 的线性空间结构相协调，并且

$$\mathscr{B} = \{B_\varepsilon : B_\varepsilon = \{x \in X : p(x) \leqslant \varepsilon\}, \varepsilon > 0\}$$

是拓扑 τ_p 中的 θ 的邻域滤系基；

(2) (X, τ_p)是局部凸拓扑线性空间；

(3) p 关于 τ_p 一致连续，且 $\mathring{B}_\varepsilon = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$；

(4) τ_p 是使 p 连续并使 X 上的拓扑结构与其加群结构相协调的最粗拓扑.

证 (1)与(2)可由验证 $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 满足定理 1.5 的(1)与(2)得到. (3)由定理 1.6 得到. 为证(4)，设 τ 是 X 上任一个使 p 连续并使 τ 与 X 的加群结构相协调的拓扑. 对于任意的 $\varepsilon > 0$，由 p 的连续性，知

$$B_\varepsilon = p^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]) \in \tau.$$

另一方面，对任意 $a \in X$，由于 τ 是使 X 的拓扑与其加群结构相协调的拓扑，据假设，映射$(x,y) \to x + y$ 在 τ 之下连续，从而 $a + B_\varepsilon$ 是 a 关于 τ 的邻域. 这表明 $\tau_p \subset \tau$. 因此 τ_p 是使 p 连续并使 τ_p 与 X 线性结构相协调的最粗拓扑. 定理得证.

定理 1.9 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$f : X \to \mathbb{K}$ 是 X 上的线性式，则$|f(x)|$确定 X 上的一个半范数. 若令

$$p(x) = |f(x)|,$$

那么，由 p 产生的 X 上的拓扑 τ_p 是使线性式 f 连续的最粗拓扑.

证 $p(x) = |f(x)|$显然是半范数. 据定理 1.8，由 p 产生的

X 上的拓扑 τ_p 是使 $p(x)$ 连续，并使 τ_p 与 X 的加群结构相协调的最粗拓扑.

为证 τ_p 也是使 f 连续的最粗拓扑，我们假设使 $f: X \to \mathbf{K}$ 连续的最粗拓扑为 τ，下面证明 $\tau = \tau_p$.

因 τ 是最粗的，故 $\tau \subset \tau_p$. 另一方面，由 f 关于 τ 连续知 $|f(x)|$ 关于 τ 也连续，亦即 $p(x)$ 关于 τ 连续. 但 τ_p 是使 p 连续的最粗拓扑，故 $\tau_p \subset \tau$，因此 $\tau = \tau_p$. 定理得证.

局部凸空间不仅可由一个半范数产生，而且可以由一族半范数产生.

定义 1.7 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，

$$\mathscr{F} = \{p : p \text{ 为 } X \text{ 上的半范数}\},$$

它是由 X 上某些半范数 p 所组成的集合. 记由 p 产生的 X 上的拓扑为 τ_p(由定理 1.8，τ_p 使 X 成为局部凸空间). 对于 $p \in \mathscr{F}$，若 τ 是使 $\tau_p \subset \tau$ 成立的最粗拓扑，则称 $\tau \equiv \tau(\mathscr{F})$ 为由 $\mathscr{F}$ 产生的 X 上的拓扑. 易见，τ 是所有 τ_p 的上确界，记为 $\tau = \tau(\mathscr{F})$.

例 1.1 设 $p_1, \cdots, p_n$ 是 X 上的 n 个半范数. 记

$$\mathscr{F} = \{p_1, \cdots, p_n\},$$

则由 $\mathscr{F}$ 产生的 X 上的拓扑 $\tau = \tau(\mathscr{F})$ 的邻域滤系基为

$$\{U : U = \{x \in X : p_i(x) \leqslant \varepsilon_i\}, p_i \in \mathscr{F}, \varepsilon_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

我们有

定理 1.10 由半范数集 $\mathscr{F}$ 所产生的线性空间 X 上的拓扑 τ 是与 X 的线性空间结构相协调的，并且也使 X 成为一个局部凸空间.

证 对每个 $p \in \mathscr{F}$，我们记 $X_p = (X, \tau_p)$，据定理 1.8，X_p 为局部凸空间. 因此映射 $(x, y) \to x + y$ 与 $(\lambda, x) \to \lambda x$ 关于每个 τ_p($p \in \mathscr{F}$)是连续的. 但由定义 1.6，$\tau_p \subset \tau \equiv \tau(\mathscr{F})$ 对每个 $p \in \mathscr{F}$ 成立，从而上述两个映射关于 τ 也连续. 这样，τ 产生的 X 的拓扑结构与其线性空间结构相协调，故 (X, τ) 为拓扑线性空间. 进而，它还是局部凸的，因为若 X_p 在 θ 的凸邻域滤系基为

$$\mathscr{B}_{\tau_p} = \{B_{\varepsilon_p} = \{x \in X : p(x) \leqslant \varepsilon_p\}, \varepsilon_p > 0\},$$

则 τ 的邻域滤系基可取为 $\bigcup_{p\in\mathscr{S}} \mathscr{B}_{\tau_p}$，它也是凸邻域滤系基，定理得证.

定理 1.11 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$p_1, \cdots, p_n$ 为 X 上的半范数. 若令

$$p(x) = \max\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}, \quad x \in X,$$

则 p 也是 X 上的半范数，而且 p 关于由 $\mathscr{F} = \{p_1, \cdots, p_n\}$ 所产生的拓扑 $\tau = \tau(\mathscr{F})$ 是连续的.

定理 1.12 对于线性空间 X 上的两个半范数 p, q，下列三论断等价：

(1) p 是 τ_q 连续的(即指 p 关于拓扑 τ_q 连续)；

(2) $\tau_p \subset \tau_q$；

(3) 存在 $M>0$，使对每个 $x \in X$，有 $p(x) \leqslant Mq(x)$.

以上两个定理的证明请读者自行完成.

赋范线性空间是一个局部凸空间. 作为局部凸空间的另一特例，我们引进 Fréchet 空间的概念.

定义 1.8 设 X 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，我们称 X 为 Fréchet 空间，若 X 是由至多可数个半范数 $p_1, p_2, \cdots, p_m, \cdots$ 确定的局部凸空间，并且这些半范数满足：

(1) 分离性：若 $x \in X$ 使得每个 $p_m(x) = 0, m = 1, 2, \cdots$，则 $x = \theta$.

(2) 完备性：设 $\{x_k\} \subset X$ 为 X 中的 Cauchy 序列，则存在 $x \in X$，使得对所有 $m \in N$，有

$$\lim_{k\to\infty} p_m(x_k - x) = 0.$$

这里，局部凸空间 X 中的 Caulchy 序列是指：对于任意 $\varepsilon > 0$ 及对任意 $m \in N$，必存在 $N(m, \varepsilon) \in N$，使得当 $k, l > N(m, \varepsilon)$ 时，有

$$p_m(x_k - x_l) < \varepsilon.$$

若条件(2)不满足，则称 X 为 Pre-Fréchet 空间. 易见，若

Fréchet 空间只由一个半范数确定，则它便是 Banach 空间. 另一方面，Fréchet 空间以

$$\rho(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x-y)}{1+p_m(x-y)}$$

为距离而成为一个距离空间.

在本章的 § 3 中就要遇到 Fréchet 空间.

§ 2　对偶空间，对偶拓扑

对偶概念源于射影几何中的点、面的对偶性，后来发展成为在数学理论研究中起重要作用的对偶理论. 对于拓扑线性空间，其对偶空间与原空间上的连续线性式有密切关系. 我们从最基本的定义出发来定义对偶空间与对偶拓扑.

定义 2.1　设 X 与 Y 为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 我们称 $X\times Y$ 到 $\mathbf{K}$ 的二重映射 $F: X\times Y\to\mathbf{K}$ 为非退化二重线性式（简称二重线性式），若它满足：

(1) $F(x_1+x_2,y)=F(x_1,y)+F(x_2,y)$， $x_1,x_2\in X, y\in Y$，
$F(\lambda x,y)=\lambda F(x,y)$， $x\in X, y\in Y, \lambda\in\mathbf{K}$；

(2) $F(x,y_1+y_2)=F(x,y_1)+F(x,y_2)$， $x\in X, y_1,y_2\in Y$，
$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$， $x\in X, y\in Y, \lambda\in\mathbf{K}$；

(3) 若 $F(x,y)=0$ 对一切 $y\in Y$ 成立，则

$$x=\theta \quad (X \text{ 中的零元}),$$

若 $F(x,y)=0$ 对一切 $x\in X$ 成立，则

$$y=\theta \quad (Y \text{ 中的零元}).$$

条件(3)称为二重线性式的非退化性. 对于 X 与 Y，若存在 $X\times Y$ 到 $\mathbf{K}$ 上的二重线性式 F，则称 X 与 Y 是对偶的，也称 Y 为 X 的对偶空间与 X 为 Y 的对偶空间. 其对偶性由二重线性式 F 确定，并称 F 为 X 与 Y 的对偶线性式.

例 2.1　设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$Y=L(X,\mathbf{K})$为 X 上所有

线性式所生成的线性空间，则

$$F(x,u)=u(x),\quad x\in X,u\in Y$$

是 $X\times Y$ 到 $\mathbb{K}$ 上的二重线性式. 故 X 与 Y 是对偶的. 常称 $F(x)=u(x)$ 为 X 与 Y 的典则对偶.

例 2.2 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间，$Y=\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$ 为 X 上的连续线性泛函所生成的线性空间，则对于 $x\in X,f\in\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$，线性式 $F(x,f)=f(x)$ 确定了空间 X 与 $\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$ 之间的对偶，因此 $Y=\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$ 是 X 的对偶空间. 这与一般泛函分析教程中称 $\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$ 为对偶空间或共轭空间是一致的.

按定义 2.1 的记号，若 F 为 X 与 Y 的对偶线性式. 固定 $x\in X$，让 $y\in Y$ 变动，记为 $F_x(y)\equiv F(x,y)$；而当 $y\in Y$ 固定，让 $x\in X$ 变动时，记为 $F_y(x)\equiv F(x,y)$. 易见 $F_x: Y\to\mathbb{K}$ 与 $F_y: X\to\mathbb{K}$ 分别为 Y 与 X 上的线性式.

引理 2.1 设 X 与 Y 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，F 为 X 与 Y 的对偶线性式. 则映射 $x\to F_x$ 是 X 到 $L(Y;\mathbb{K})$ 的线性单射，而 $y\to F_y$ 是 Y 到 $L(X;\mathbb{K})$ 的线性单射.

证 映射 $g: x\to F_x$ 的线性性质可直接验得. 我们证 g 为单射. 任给 $x_1,x_2\in X$，满足 $g(x_1)=g(x_2)$，由线性得

$$g(x_1-x_2)=0,$$

亦即 $F_{x_1-x_2}$ 为零映射：对每个 $y\in Y$，有 $F_{x_1-x_2}(y)=0$. 据 F 的性质 (3)（见定义 2.1），即非退化性，得

$$x_1-x_2=0.$$

从而 g 为单射. 对另一个映射可类似地证明.

现在，利用一个空间的拓扑去确定它的对偶空间的拓扑.

定义 2.2 设 X 与 Y 为 $\mathbb{K}$ 上的对偶空间，F 为对偶线性式. 我们称使得 Y 上的线性式族 $\{F_y: y\in Y\}$ 中的每一个映射 F_y 保持连续的最粗拓扑为 X 上的原始拓扑，记为 $\tau(X,Y)$，并称 $\tau(X,Y)$ 为由 Y 与 F 诱导的拓扑. 类似地，定义 Y 上的原始拓扑 $\tau(Y,X)$，它是由 X 与 F 诱导的拓扑. 我们称 $(X,\tau(X,Y))$ 与 $(Y,\tau(Y,X))$

互为对偶拓扑空间.

下面的定理给出对偶拓扑的具体形式.

定理 2.1 X 上的拓扑 $\tau(X,Y)$ 与它的线性空间结构相协调，并且使 X 成为 T_2 型局部凸拓扑线性空间，此拓扑就是由分离的半范数族 $(p_y: y\in Y)$ 所产生的拓扑，其中的半范数 p_y 由

$$p_y(x) = |F_y(x)| = |F(x,y)|$$

确定. 此外，X 上的线性式 f 关于拓扑 $\tau(X,Y)$ 连续，当且仅当存在 $y\in Y$，使 $f=F_y$. 关于 $\tau(Y,X)$ 的上述对偶论述也成立.

证 令

$$\mathscr{B} = \{V_\varepsilon : V_\varepsilon = \{x \in X : |F_y(x)| \leqslant \varepsilon \text{ 对任意有限个 } y \in Y \text{ 成立}\}, \varepsilon > 0\}.$$

容易验证，$\mathscr{B}$ 满足 §1 中定理 1.3 的(1)～(3)，故 $(X,\tau(X,Y))$ 是一个拓扑线性空间. 我们证明 V_ε 为凸集. 事实上，取 $u,v\in V_\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}|F_y(\alpha u + (1-\alpha)v)| &= |\alpha F_y(u) + (1-\alpha)F_y(v)| \\ &\leqslant \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\alpha u+(1-\alpha)v\in V_\varepsilon$ 对每个 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 成立. 因此 $(X,\tau(X,Y))$ 为局部凸空间，而集合 $\{F_y : Y\in Y\}$ 是非零线性式族，从而 $\{p_y : y\in Y\}$ 为分离的半范数族.

此局部凸空间也是 T_2 型的，因为 $\{F_y : y\in Y\}$ 为非零线性式族，对于 $u,v\in X$，且 $u\neq v$，至少有一个 $y\in Y$，使

$$F_y(u-v) = \alpha \neq 0.$$

取

$$V = \{z \in X : |F_y(z-u)| < |\alpha|/3\},$$
$$U = \{z \in X : |F_y(z-v)| < |\alpha|/3\},$$

则 $V\cap U\neq\varnothing$，而 V 为 u 的邻域，U 为 v 的邻域.

综上所证，知 $(X,\tau(X,Y))$ 为 T_2 型局部凸拓扑线性空间，这个拓扑与由半范数族 $\{p_y : y\in Y\}$ 产生的拓扑等同.

最后证明 X 上的线性式 f 关于 $\tau(X,Y)$ 连续的充要条件是：存在 $y\in Y$，使得 $f=F_y$. 其实，充分性显然. 我们只证必要性. 若 f

为 X 上的线性式，且关于 $\tau(X,Y)$ 连续，令

$$p(x)=|f(x)|,$$

则 $p(x)$ 为 X 上的半范数，且关于 $\tau(X,Y)$ 也连续. 记

$$\mathscr{F}=\{p_y : y\in Y\},$$

其中 $p_y(x)=|F_y(x)|$. 由上面的构造，知 $\tau(X,Y)=\tau(\mathscr{F})$. 据定理 1.20，可得 $p\in\mathscr{F}^*$，从而存在 $y_1,\cdots,y_n\in Y$，使

$$p\leqslant p_{y_1}+\cdots+p_{y_n},$$

亦即对 $x\in X$ 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|F_{y_1}(x)|+\cdots+|F_{y_n}(x)|\\&=|F(x,y_1)|+\cdots+|F(x,y_n)|.\end{aligned}$$

令 $M_k=\{x\in X : F_{y_k}(x)=0\}$，$k=1,2,\cdots,n$，即 M_k 是 F_{y_k} 的核. 于是对每个

$$x\in\bigcap_{k=1}^{n}M_k,$$

有 $f(x)=0$. 我们用归纳法证明，存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$，使得

$$f(x)=\lambda_1F_{y_1}(x)+\cdots+\lambda_nF_{y_n}(x),\quad x\in X.$$

不失一般性，我们设 $F_{y_1},\cdots,F_{y_n}$ 线性无关.

当 $n=1$ 时，由 $f|_{M_1}=0$ 得

$$M_1=\{x\in X : F_{y_1}(x)=0\}\subset M=\{x\in X : f(x)=0\}.$$

由本章习题 9 知商空间 X/M 为一维线性空间，故对任何 $z\notin M$，商

$$\lambda_1=\frac{f(z)}{F_{y_1}(z)}$$

与 z 无关. 于是 $f(z)=\lambda_1F_{y_1}(z)$ 对所有 $z\in X$ 皆成立.

现在假设，当 $n=1$ 时结论成立. 那么，设

$$|f(x)|\leqslant|F_{y_1}(x)|+\cdots+|F_{y_{n-1}}(x)|+|F_{y_n}(x)|,$$

并记为

$$|f(x)|\leqslant|g(x)|+|F_{y_n}(x)|,$$

其中$|g(x)|=|F_{y_1}(x)|+\cdots+|F_{y_{n-1}}(x)|$. 据归纳假设,存在$\lambda_1$,$\cdots$,$\lambda_{n-1}$,使得

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda_1 F_{y_1}(x) + \cdots + \lambda_{n-1} F_{y_{n-1}}(x) \\ &= F_{\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1}}(x) = F_{y_0}(x), \end{aligned}$$

其中$y_0=\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_{n-1}y_{n-1}\in Y$. 故我们只要证明,当

$$|f(x)| \leqslant |F_{y_1}(x)| + |F_{y_2}(x)|$$

时,存在$\lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{K}$,使得

$$f(x) = \lambda_1 F_{y_1}(x) + \lambda_2 F_{y_2}(x) \tag{2.1}$$

就够了. 事实上,作

$$M_j = \{x \in X : F_{y_j}(x) = 0\}, \quad j = 1,2.$$

由于$F_{y_j}(x)=F(x,y_j)$为X上的非零线性式,因而对于两个极大线性子空间M_1与M_2,当$y_2\neq ky_1$时有$M_1\neq M_2$. 取$x_1\in M_2-M_1$,$x_2\in M_1-M_2$,则

$$F_{y_j}(x_k) = \delta_k^j, \quad k,j = 1,2.$$

令$f(x_k)=1$,$k=1,2$,对每个$x\in X$,我们有

$$\begin{aligned} &F_{y_j}(x - F_{y_1}(x)x_1 - F_{y_2}(x)x_2) \\ &\quad = F_{y_j}(x) - F_{y_j}(x_1)F_{y_1}(x) - F_{y_j}(x_2)F_{y_2}(x) = 0, \end{aligned}$$

从而

$$x - F_{y_1}(x)x_1 - F_{y_2}(x)x_1 \in M_j, \quad j = 1,2,$$

故$x\in M_1\cap M_2$. 但因

$$|f(x)| \leqslant |F_{y_1}(x)| + |F_{y_2}(x)|,$$

我们得$f|_{M_1\cap M_2}=0$. 于是

$$\begin{aligned} 0 &= f(x - F_{y_1}(x)x_1 - F_{y_2}(x)x_2) \\ &= f(x) - F_{y_1}(x)f(x_1) - F_{y_2}(x)f(x_2) \\ &= f(x) - F_{y_1}(x) - F_{y_2}(x), \end{aligned}$$

此即$f(x)=F_{y_1}(x)+F_{y_2}(x)$,亦即(2.1)式成立. 定理得证.

定理 2.2 X上的半范数p关于$\tau(X,Y)$连续,当且仅当存在

$y_1,\cdots,y_n\in Y$,使对一切 $x\in X$ 有

$$p(x)\leqslant |F(x,y_1)|+\cdots+|F(x,y_n)|,\quad x\in X.$$

利用引理 2.1 与定理 2.1 的结果不难证明此定理.

当我们把上述对偶关系应用到 X 与 $L(X;\mathbb{K})$ 上时,就可得到弱*拓扑等概念.

定义 2.3 设(X,τ)为 $\mathbb{K}$ 上的 T_2 型局部凸空间,$X^*=\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$为 X 上关于 τ 连续的线性泛函的全体所生成的线性空间,称为由 $\tau(X,X^*)$决定的 X 上的拓扑为 X 的弱拓扑. 在此拓扑意义下的闭性、连续性等概念,均称为弱闭的、弱连续的等等. 对偶地,我们称由 $\tau(X^*,X)$决定的 X^* 上的拓扑为 X^* 的弱*拓扑. 相应地,有弱*闭、弱*连续,等等.

关于弱拓扑,我们有

定理 2.3 设(X,τ)为 $\mathbb{K}$ 上的 T_2 型局部凸拓扑线性空间,$\tau(X,X^*)$为 X 上的弱拓扑,则

(1) $\tau(X,X^*)\subset\tau$;

(2) X 上的线性式 g 关于 τ 连续,当且仅当 g 是弱连续的.

证 由于 $X^*=\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$,据定理 2.1,$\tau(X,X^*)$由线性式族

$$\{F_u:u\in X^*\}$$

确定,其中 $F_u(x)=F(x,u)=u(x),x\in X,u\in X^*$. 而 $\tau(X,X^*)$是使每个 $F_u=u$ 连续的最粗拓扑,X^* 中的每个元 u 又是关于 τ 连续的(见 X^* 的定义),因此,$\tau(X,X^*)\subset\tau$. 即(1)得证.

为证(2),设 g 为关于 τ 连续的线性式,则 $g\in X^*$,因此 $g=F_g$,故据定理 2.1 知 g 关于 $\tau(X,X^*)$连续. 反之,若 g 关于 $\tau(X,X^*)$连续,则由(1),$\tau(X,X^*)\subset\tau$,从而 g 关于 τ 连续,由此(2)得证.

在赋范线性空间中,对偶理论有更为丰富的结果. 我们列举几个性质作为例子.

定义 2.4 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间,$\|\cdot\|_X$为其上的范数,$X^*=\mathscr{L}(X;\mathbb{K})$为 X 上关于范数拓扑$(X,\|\cdot\|_X)$连续的线性

泛函的全体所生成的线性空间. 我们称具有范数 $\|\cdot\|_X$的空间$(X,\|\cdot\|_X)$为 X 上的强拓扑或范数拓扑;称由 $\tau(X,X^*)$决定的拓扑为 X 上的弱拓扑. 进而,称 X^* 上由范数

$$\|u\|_{X^*}=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|u(x)|$$

决定的拓扑为 X^* 上的强拓扑,而称 $\tau(X^*,X)$决定的拓扑为 X^* 上的弱*拓扑.

于是,$(X,\|\cdot\|_X)$与$(X^*,\|\cdot\|_{X^*})$为 Banach 空间,而$(X,\tau(X,X^*))$与$(X^*,\tau(X^*,X))$只是 T_2 型局部凸空间.

定义 2.5 设 X 为 Banach 空间. 称 X^* 的对偶空间

$$(X^*)^*=\mathscr{L}(X^*;\mathbf{K})$$

为 X 的二次对偶,记为 X^{**},它也是 Banach 空间. 可以继续定义三次、四次对偶,等等. 当 $X=X^{**}$时,称 X 为自返的($X=X^{**}$是在等距同构意义下).

这样,在 X 与 X^* 上存在几种不同的拓扑,我们可以比较它们之间的关系.

定理 2.4 设 X 为赋范线性空间,则下述论断等价

(1) X 为有限维的,

(2) X^* 为有限维的,

(3) X^{**} 为有限维的,

并且 X,X^*,X^{**}的维数相等,且 X 是自返空间.

依照泛函分析的常规方法,建立 X^{**} 与 X 之间的对应关系,并利用 Hahn-Banach 扩张定理,便可证明本定理.

定理 2.5 设 X 为赋范线性空间,记 τ 为 X 的强拓扑. 则

(1) $\tau(X,X^*)\subset\tau$;

(2) $\tau(X,X^*)=\tau$,当且仅当 X 为有限维的.

一般地,关于 X^* 上的拓扑,有下列三种:

(1) 范数拓扑,即由范数

$$\|u\|_{X^*}=\sup\{|u(x)|:\|x\|_X\leqslant 1\}$$

确定的拓扑,称为 X^* 上的范数拓扑.

(2) 弱*拓扑,即由$\tau(X^*,X)$确定的拓扑.

(3) 弱拓扑,即视X^*为赋范线性空间,$(X^*)^*$为其对偶空间,由$\tau(X^*,X^{**})$确定的X^*上的拓扑.

我们来研究这些拓扑之间的关系.

定义 2.6 称X到X^{**}的映射$T: x\to x''$为嵌入映射,若它对每个$u\in X^*$,关系式$u(x)=x''(u)$成立.记X在T之下的像集为$X_0=T(X)$,显然,$X_0\subset X^{**}$.

定理 2.6 用定义 2.6 的记号,我们有

(1) $\tau(X^*,X_0)=\tau(X^*,X)$;

(2) 嵌入映射$T: x\to x''$是X到X_0上的同胚映射,且映射T与T^{-1}关于拓扑$\tau(X,X^*)$与$\tau(X_0,X^*)$是连续的;

(3) 把X_0视为X^{**}的子空间,由X^{**}上的弱*拓扑所诱导的相对拓扑是$\tau(X_0,X^*)$;

(4) 嵌入映射$T: x\to x''$在X的弱拓扑$\tau(X,X^*)$及X^{**}的弱*拓扑$\tau(X^{**},X^*)$下是连续的.

证 (1) 在X中取任意有限多个元所生成的子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则在嵌入映射T下,有

$$\{x_1'',\cdots,x_n''\}\subset X_0=T(X),$$

其中x_k''满足

$$u(x_k)=x_k''(u),\quad u\in X^*.$$

于是,X^*上的弱*拓扑$\tau(X^*,X)$中的零元θ的邻域为

$$V_\varepsilon=\{U\in X^*: |u(x_k)|\leqslant\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

但因为$u(x_k)=x_k''(u)$,故V_ε可改写为

$$V_\varepsilon=\{u\in X^*: |x_k''(u)|\leqslant\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

后者恰是X^*上的弱拓扑$\tau(X^*,X_0)$中零元的邻域,于是

$$\tau(X^*,X_0)=\tau(X^*,X).$$

(2) 任取X^*中的有限集$\{u_1,\cdots,u_n\}$,则

$$U=\{x\in X: u_k(x)\leqslant\varepsilon,\ k=1,\cdots,n\}$$

为 X 上的弱拓扑 $\tau(X,X^*)$中零元 θ 的邻域基，而

$$V = \{x'' \in X_0 : |x''(u_k)| \leqslant \varepsilon,\ k = 1,\cdots,n\}$$

为 X_0 上弱*拓扑 $\tau(X_0,X^*)$中零元 θ 的邻域基. 也因

$$u_k(x) = x''(u_k),\quad k = 1,2,\cdots,n,$$

知 $T(U)=V$. 这表明 T^{-1}是在弱拓扑 $\tau(X,X^*)$与弱*拓扑 $\tau(X_0,X^*)$下连续的. 并且，由 $T^{-1}(V)=U$ 表明，T 关于上述两拓扑也连续，故 T 为同胚映射.

(3) 也取 X^* 中的一个任意有限集$\{u_1,\cdots,u_n\}\subset X^*$，则

$$W = \{\varphi \in X^{**} : |\varphi(u_k)| \leqslant \varepsilon,\ k = 1,2,\cdots,n\}$$

为 X^{**} 中零元 θ 关于弱*拓扑 $\tau(X^{**},X^*)$的邻域基. 于是 X_0 关于 $\tau(X^{**},X^*)$的相对拓扑的邻域基为

$$W \cap X_0 = \{x'' \in X_0 : |x''(u_k)| \leqslant \varepsilon, k = 1,\cdots,n\},$$

而这正是 X_0 中关于拓扑 $\tau(X_0,X^*)$的邻域基. 故我们得到(3).

(4) 可立即由(2)和(3)得出. 定理得证.

定理 2.7 若记 X^* 上的范数拓扑为 τ^*，弱拓扑为 $\tau(X^*,X^{**})$，弱*拓扑为 $\tau(X^*,X)$，则

(1) $\tau^*\supset\tau(X^*,X^{**})\supset\tau(X^*,X)$；

(2) $\tau(X^*,X^{**})=\tau(X^*,X)$，当且仅当 X 为自返空间；

(3) $\tau^*=\tau(X^*,X^{**})$，当且仅当 X 为有限维空间.

证 (1) $\tau^*\supset\tau(X^*,X^{**})$由定理 2.5(1)得到. 第二个包含关系式可由

$$\tau(X^*,X) = \tau(X^*,X_0) \subset \tau(X^*,X^{**})$$

得到.(上式中的等式可由定理 2.6(1)得到，后一包含关系可由本章习题 19 得到.)

(2) X 为自返空间，当且仅当 $X_0=X^{**}$，从而当且仅当

$$\tau(X^*,X_0) = \tau(X^*,X^{**}).$$

又据定理 2.6(1)，上式成立当且仅当 $\tau(X^*,X)=\tau(X^*,X^{**})$.

(3) 由定理 2.5(2)，$\tau^*=\tau(X^*,X^{**})$，当且仅当 X^* 为有限维. 而由定理 2.4 知 X^* 为有限维，当且仅当 X 为有限维，从而得

(3).

定理得证.

对偶理论除对偶空间外,还有一个重要部分,即对偶算子理论.本书中我们不讨论对偶算子的一般理论,而只在下节中介绍分布理论.

§3 分布空间及其基本性质

分布(distribution),又称广义函数,是由法国著名数学家 L. Schwartz 在本世纪 40 年代末提出的.它源于古典的数学物理方法、Fourier 分析,以及物理学、量子力学.而在至今的短短几十年中,分布理论不仅在数学的各个分支,而且在理论物理等学科中都得到愈来愈广泛的应用.同时它自身也已成为现代数学的一个重要分支.

本节仅介绍基本空间为 $X=\mathbf{R}^n$ 时的分布空间与分布理论.

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开子集,$n\in N$.我们采用下列记号:

$C^m(\Omega)=\{f:f$ 为 Ω 上具有直到 m 阶在内的连续偏导数的函数$\}$, $m\in\{0,1,2,\cdots\}=\{0\}\cup N\equiv\mathbf{Z}^+\equiv\mathbf{P}$;

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega);$$

$B^m(\Omega)=\{f\in C^m(\Omega):f$ 的直到 m 阶偏导数在 Ω 上有界$\}$;

$B^\infty(\Omega)=\{f\in C^\infty(\Omega):f$ 的各阶偏导数在 Ω 上有界$\}$;

$$\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in\Omega:f\in C^1(\Omega),f(x)\neq 0\}}.$$

设 $K\subset\Omega$ 为 Ω 中的紧子集,我们记

$$C^m(K)=\{f\in C^m(\Omega):\operatorname{supp}(f)\subset K\};$$

$$C^\infty(K)=\{f\in C^\infty(\Omega):\operatorname{supp}(f)\subset K\}=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(K).$$

于是,在 Ω 上定义的具紧支集的函数类是 $\bigcup_k C^m(K)$ 与 $\bigcup_k C^\infty(K)$,

分别记为 $C_0^m(\Omega)$ 与 $C_0^\infty(\Omega)$.

定理 3.1 $C^m(\Omega)$是一个 Fréchet 空间.

证 在 Ω 中取一紧集列 $K_1, K_2, K_3, \cdots$,使满足

(1) $K_j \supset \mathring{K}_{j+1}$, $j = 1,2,3,\cdots$;

(2) $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$.

由 $\boldsymbol{R}^n$ 中开集 Ω 的构造与 $\boldsymbol{R}^n$ 的仿紧性知,这样的 K_j 存在. 于是,可定义

$$p_j(f) = \sup_{K_j} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f|, \quad j = 1,2,3,\cdots,$$

其中 $D = D_x = (\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n}), x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$; 取

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{Z}_+^n, \quad \boldsymbol{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\},$$

记

$$|\alpha| \doteq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n; \quad D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

这样 $p_j(f)$成为 $C^m(\Omega)$上的满足本章 §1 定义 1.7 的条件(1)和(2)的半范数,使 $C^m(\Omega)$成为 Fréchet 空间.

定理 3.2 $C^\infty(K)$是一个 Fréchet 空间.

证 取

$$p_m(f) = \sup_{K} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f|, \quad m = 0,1,2,\cdots,$$

这是满足本章 §1 定义 1.7 的条件(1)和(2)的半范数,使 $C^\infty(K)$为 Fréchet 空间.

定理 3.3 $C^\infty(\Omega)$是一个 Fréchet 空间.

证 首先取 Ω 中的渐张紧集列 K_j,使满足

$$K_j \subset \mathring{K}_{j+1}, \quad \text{且} \ \bigcup_j K_j = \Omega.$$

再定义

$$p_{m,j}(f) = \sup_{K_j} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f|,$$

$$j = 1,2,3,\cdots; \quad m = 0,1,2,\cdots.$$

易见 $p_{m,j}(f)$为满足§1 定义 1.7 的条件(1)和(2)的半范数，使得 $C^{\infty}(\Omega)$为 Fréchet 空间.

在 $C^{\infty}(\Omega)$中，“序列$\{\varphi_j\}$收敛于 0”是指：对 Ω 中任一紧集 $K\subset\Omega$，任给的 $\varepsilon>0$ 以及任一指标 α，存在整数 $N=N(k,\varepsilon,\alpha)>0$，使得当 $j\geqslant N$ 时，有

$$\sup_{K}|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi_j(x)|<\varepsilon.$$

空间 $C^{\infty}(\Omega)$还有一个性质，它的每个有界子集都是相对紧的(称具有此性质的空间为 Montel 空间，有关细节可以参看参考书目[12]).

注意到 $C_0^{\infty}(\Omega)$并不是 Fréchet 空间，因为不存在使 $C_0^{\infty}(\Omega)$为 Fréchet 空间的半范数列. 于是，为使 C_0^{∞} 成为一个合适的局部凸空间，必须引进一种相应合适的拓扑结构，也就是我们现在要介绍的所谓的“归纳极限拓扑”.

定义 3.1 设 X 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$为 X 的一族线性子空间，且

$$X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha.$$

若 X_α 满足

(1) X_α 为局部凸空间，$\alpha\in I$；

(2) 若 $X_{\alpha_1}\subset X_{\alpha_2}$，$\alpha_1,\alpha_2\in I$，则 X_{α_1}的拓扑等同于它关于 X_{α_2}的子空间拓扑.

我们定义 X 的开集如下：对于 X 的任意一个凸、均衡、吸收集 U，称 U 为 X 的开集，若对任意 $\alpha\in I$，集合 $U\cap X_\alpha$ 是 X_α 中包含零元 θ 的开集.

如果按上述方式定义的 X 的拓扑使 X 成为一个局部凸空间，则我们称 X 的拓扑是族$\{X_\alpha\}$的(严格)归纳极限拓扑.

上述归纳极限拓扑的具体构造方法如下：在每个 X_α 中取 θ 的一个凸、均衡、吸收邻域 U_α，作并集 $V=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$，然后作 V 的凸均衡包 U：

$$U = \Big\{u \in X : u = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j,\ v_j \in V, \beta_j \geqslant 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1,\ n \in N\Big\}.$$

于是,U 是 X 中的凸、均衡、吸收集,而 $U \cap X_\alpha$ 恰是 X_α 的零元 θ 的凸、均衡、吸收邻域,

$$\{U \subset X : U_\alpha \in \mathscr{B}_{X_\alpha}(\theta),\ \alpha \in I\} \equiv \tau$$

使(X,τ)成为局部凸空间,而 τ 就是 X 的归纳极限拓扑.

把上述方法具体应用到 $C_0^\infty(\Omega)$上.

在 Ω 中取渐张紧集列 K_j,使满足 $K_j \subset K_{j+1}$ 且 $\bigcup_j K_j = \Omega$. 如定理 3.2 那样,作 $C^\infty(K_j) \equiv E_j$. 则易证 $E_j \subset E_{j+1}$; 并且恒同映射(或称嵌入映射)

$$l_j : E_j \to E_{j+1}$$

是连续的;进而还有 $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_j E_j$.

现在赋予 $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_j E_j$ 如下的拓扑: 若 V 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的凸、均衡、吸收集,则 V 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 的零元的邻域,当且仅当 $V \cap E_j$ 为 E_j 的零元的邻域.

定义 3.2 按照上述过程定义的 $C_0^\infty(\Omega)$的拓扑,使 $C_0^\infty(\Omega)$成为一个 T_2 型局部凸空间,记为 $D(\Omega)$. 以后记号 $D(\Omega)$与 $C_0^\infty(\Omega)$将同时使用.

我们指出,在 $D(\Omega)$的归纳极限拓扑之下,"序列$\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$趋于 0"是指:

(1) 存在一个紧集 $K \subset \Omega$,使对所有 $k \in N$,有

$$\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset K;$$

(2) 在 K 上,对任一固定的指标 α,序列 $\{D^\alpha \varphi_k\}$ 关于 x 一致收敛于零.

另一方面,还可以证明,归纳极限拓扑与渐张紧集列的选取无

关.

下面给出空间 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 中的元的例：设 $a>0$，令

$$j_a(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{a^2}{(|x|^2-a^2)}\right\}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a.\end{cases}$$

利用 $j_a(x)$，并由 Friedrich 软化子方法，可以构造出 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 中许多的元. 事实上，对任一个定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续且具紧支集的函数 $f(x)$，定义

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\equiv\frac{1}{C_\varepsilon}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$C_\varepsilon=\int_{\boldsymbol{R}^n}j_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y.$$

由于 $\mathrm{supp}(j_\varepsilon(x))$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧集，且显见 $j_\varepsilon\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，故卷积 $f_\varepsilon(x)$ 也是任意次连续可微的. 若设 $\mathrm{supp}(f)=K$，则

$$\mathrm{supp}(f_\varepsilon)\subset K_\varepsilon=\{x\in\boldsymbol{R}^n:d(x,K)\leqslant\varepsilon\}.$$

由如下定理可知，$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C^m(\Omega)$ 中稠密，$m\in\boldsymbol{Z}_+$.

定理 3.4 设 $f\in C^m(\Omega)$，$m\in\boldsymbol{Z}_+$，则对 Ω 的任一紧子集 K，必存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数列 $\{\varphi_n\}\subset C_0^\infty(\Omega)$，使 φ_n 连同其直至 m 阶的各阶导数，对 $x\in K$ 一致收敛于 f 及其相应的导数.

证 对于 $m=0$：取 Ω 的任一紧子集 K，令 $\varepsilon_0>0$ 满足 $K_{2\varepsilon_0}\subset\Omega$，这里

$$K_{2\varepsilon_0}=\{x\in\boldsymbol{R}^n:d(x,K)\leqslant 2\varepsilon_0\}.$$

作函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in K_{\varepsilon_0},\\ 0, & x\notin K_{\varepsilon_0}.\end{cases}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<\varepsilon_0$，作

$$\tilde{f}(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y.$$

由

$$\operatorname{supp}(\tilde{f}_\varepsilon) \subset K_{\varepsilon_0+\varepsilon} \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \Omega$$

知 $\tilde{f}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. 又因

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y = 1,$$

故当 $x\in K\subset K_{\varepsilon_0}$ 时有

$$\begin{aligned}|\tilde{f}_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left|\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}[f(y)-f(x)]J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \max_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|f(y)-f(x)|\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这表明 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{f}_\varepsilon(x) = f(x)$ 在 K 上一致成立.

对于 $m>0$：同上作 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$. 由分部积分法知，当 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 时，只要 $|\alpha|\leqslant m$，则对 $x\in K$，由

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_x^\alpha \tilde{f}_\varepsilon(x) &= \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\tilde{f}(y)\mathrm{D}_x^\alpha J(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\tilde{f}(y)(-\mathrm{D}_y)^\alpha J(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\mathrm{D}_y^\alpha\tilde{f}(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}\mathrm{D}_y^\alpha f(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是，对 $|\alpha|\leqslant m$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{D}_x^\alpha\tilde{f}_\varepsilon(x) = \mathrm{D}_x^\alpha f(x), \quad x\in K$$

一致成立. 最后只要取 $\varphi_n = \tilde{f}_{\frac{1}{n}}$ 即可. 定理得证.

注 $C_0^\infty(\Omega)$ 也是一个 Montel 空间，并且 $C_0^\infty(\Omega)$ 还是一个完备空间.

有了以上准备，便可以定义 $D(\Omega)$ 的分布空间 $D^*(\Omega)$.

定义 3.3 $D(\Omega)$ 上的连续线性泛函的全体所成的集，记为 $D^*(\Omega)$，赋予弱 * 拓扑，即 $D(\Omega)$ 的对偶空间，成为局部凸空间，称为 $D^*(\Omega)$ 分布空间，其中的元称为 $D^*(\Omega)$ 分布，或简称分布.

通常把 $D^*(\Omega)$ 中的元记为 f，把 $D(\Omega)$ 中的元记为 φ，而 f 对 φ 的作用记为 $\langle f,\varphi\rangle$. 于是 $D(\Omega)$ 上的连续线性泛函 $f\in D^*(\Omega)$ 是

指 f 满足

(1) $\langle f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\rangle=\alpha_1\langle f,\varphi_1\rangle+\alpha_2\langle f,\varphi_2\rangle$，其中

$$\varphi_1,\varphi_2 \in D(\Omega), \quad \alpha_1,a_2 \in \mathbf{K}.$$

(2) 对于 Ω 的任一紧子集 $K\subset\Omega$，存在 C 与 $k\geqslant 0$（依赖于 K 的常数），且 $k\in\mathbf{Z}^+$，使对一切 $\varphi\in C_0^\infty(K)$ 皆有下式成立：

$$\langle f,\varphi\rangle \leqslant C\sum_{|x|\leqslant k}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi|, \quad \varphi\in C_0^\infty(K).$$

上述(1)与(2)可以作为 $D^*(\Omega)$分布的定义. 又若在(2)中，对 Ω 的任意紧子集 K 存在相同的 $k\geqslant 0$，而 C 可与 K 有关，则称 f 为阶 $\leqslant k$ 的 $D^*(\Omega)$分布.

我们给出 $D(\Omega)$上的线性泛函 f 连续的一个充要条件.

定理 3.5 $f\in D^*(\Omega)$，当且仅当

$$\lim_{\varphi_j\to 0}\langle f,\varphi_j\rangle = 0$$

对任意满足 $\varphi_j\to 0$ 的序列 $\{\varphi_j\}\subset D(\Omega)$成立.

证 必要性. 设 $\varphi_j\to 0$（按 $D(\Omega)$意义），亦即存在紧集 $K\subset\Omega$，使对所有 $j\in N$，有 $\mathrm{supp}(\varphi_j)\subset K$，并且对每个固定的 α，极限

$$\lim_{j\to\infty}\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(x) = 0$$

关于 $x\in\Omega$ 一致成立. 对这个 K，由必要性得

$$\langle f,\varphi_j\rangle \leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi_j(x)|,$$

但满足 $|\alpha|\leqslant k$ 的 α 为有限多个，故得 $\lim\limits_{\varphi_j\to 0}\langle f,\varphi_j\rangle = 0$.

充分性. 用反证法，设存在一紧集 $K_0\subset\Omega$，使对任意的常数 $C>0$ 与任意 $l\in\mathbf{Z}^+$，必存在 $\varphi_l\in C_0^\infty(K_0)$，使得

$$|\langle f,\varphi_l\rangle| \geqslant l\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi_l|.$$

不失一般性，设 $|\langle f,\varphi_l\rangle| = 1$，则对 $|\alpha|\leqslant l$ 有

$$\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi_l| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi_l| \leqslant \frac{1}{l}.$$

这表明在 $D(\Omega)$中 $\varphi_l\to 0$ 成立. 但 $|\langle f,\varphi_l\rangle|=1$，这与充分性假设 $\langle f,\varphi_j\rangle\to 0$ 矛盾. 定理得证.

$D^*(\Omega)$分布的例子很多.

例 3.1 若 $f\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，则 $f\in D^*(\Omega)$. 亦即

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega)\subset D^*(\Omega).$$

事实上，对任意 $\varphi\in D(\Omega)$，令

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

它是(0 阶)分布. 进而，我们证明，$L^1_{\text{loc}}(\Omega)\to D^*(\Omega)$ 为一对一的嵌入映射.

为此，设 $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，且在上述嵌入映射下，$f$ 与 g 映为 $D^*(\Omega)$ 中的同一个元，我们要证明 $f-g=0$, a.e..

记 $h=f-g$. 若 $\langle h,\varphi\rangle=0$ 对每个 $\varphi\in D(\Omega)$ 成立，即

$$\int_{R^n}h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\quad \varphi\in D(\Omega).$$

令 $\varphi(y)=\varepsilon^{-n}J_1\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)$，这里 $J_1=\dfrac{1}{c_1}j_1$. 则由

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_{R^n}h(x)J_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\mathrm{d}y\\&=\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}[h(x)-h(y)]J_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{R^n}h(y)J_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因等号右端第二项积分按假设为 0，于是

$$\begin{aligned}|h(x)|&=\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}[h(x)-h(y)]J_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\mathrm{d}y\\&\leqslant\left|\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}[h(x)-h(y)]J_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant c\varepsilon^{-n}\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|h(x)-h(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 h 的绝对连续性，知对几乎所有的 x，当 $\varepsilon\to0$ 时上式右边趋于 0，从而

$$h(x)=0,\quad \text{a.e.}.$$

这样，得 $L^1_{loc}(\Omega) \subset D^*(\Omega)$，且 $I: L^1_{loc}(\Omega) \to D^*(\Omega)$ 为单射. 我们称 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中的元为正规分布. 由此例可知，分布是经典情形下函数概念的一种推广.

但是，读者清楚，我们并没有得到 $L^1_{loc}(\Omega) = D^*(\Omega)$. 这一点由下面的例子指出.

例 3.2 δ 分布(Dirac 分布).

对任意 $\varphi \in D(\Omega)$，定义

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\Omega).$$

它也是一个零阶 $D^*(\Omega)$ 分布，但它不是正规分布. 因为若 $\delta(x)$ 由某个 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 生成，则取 $\varphi = j_\varepsilon$，由定义

$$\langle \delta, j_\varepsilon \rangle = j_\varepsilon(0) = c^{-1}.$$

另一方面，因为 δ 由 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 生成，故

$$\langle \delta, j_\varepsilon \rangle = \int f(x) j_\varepsilon(x) \mathrm{d}x.$$

Lebesgue 收敛定理给出当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\langle \delta, j_\varepsilon \rangle \to 0$，这与 $\langle \delta, j_\varepsilon \rangle = j_\varepsilon(0)$ 矛盾，于是 $\delta \notin L^1_{loc}(\Omega)$. 然而，有趣的是，$\delta$ 却是一个 Radon 测度. 例如取 $\boldsymbol{R}^n$ 为 $\boldsymbol{R}$，即 $n=1$，并取如下的局部可积函数 $H(x)$，

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

称 $H(x)$ 为 Heaviside 函数，则

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi(x) \mathrm{d}H(x).$$

一般地，由 Radon 测度的定义知，$\boldsymbol{R}$ 上的 Radon 测度空间也嵌入 $D^*(\Omega)$ 内，且对每个 Radon 测度 μ，

$$\mu(\varphi) = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mu$$

生成零阶 $D^*(\Omega)$ 分布.

还可举出不是 Radon 测度的分布的例子. 由此可见，$D^*(\Omega)$ 是一个相当大的空间.

分布空间 $D^*(\Omega)$是局部凸空间，因此两个分布之间的线性运算是已经定义了的，但在其上还能引入新的运算.

1. 零分布与分布的相等

若 $f\in D^*(\Omega)$，且对每个 $\varphi\in D(\Omega)$有

$$\langle f,\varphi\rangle = 0, \tag{3.1}$$

则称 f 为零分布，记为 $f=0$.

若 $f,g\in D^*(\Omega)$，且 $f-g=0$，则称分布 f 与 g 相等，记为 $f=g$.

2. 分布的线性运算

设 α_1,α_2 为常数，$f,g\in D^*(\Omega)$，则 $\alpha_1 f+\alpha_2 g$ 定义为一个 $D^*(\Omega)$分布，它满足

$$\langle \alpha_1 f+\alpha_2 g,\varphi\rangle = \alpha_1\langle f,\varphi\rangle+\alpha_2\langle g,\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\Omega). \tag{3.2}$$

3. 分布的平移与反射

当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时，任取 $a\in\mathbf{R}^n$.

平移：若 $f\in D^*(\mathbf{R}^n)$，则 f_a 定义为一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$分布，满足

$$\langle f_a,\varphi\rangle = \langle f,\varphi_{-a}\rangle,\quad \varphi\in D^*(\mathbf{R}^n), \tag{3.3}$$

这里 $\varphi_{-a}(x)=\varphi(x+a)$为通常函数的平移. 我们称 f_a 为 f 的平移，也记为 $\tau_a f=f_a$.

反射：若 $f\in D^*(\mathbf{R}^n)$，则 $\tilde{f}$定义为一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$分布，满足

$$\langle \tilde{f},\varphi\rangle = \langle f,\tilde{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in D(\mathbf{R}^n), \tag{3.4}$$

这里 $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(-x)$ 为通常函数的反射. 我们称 $\tilde{f}$ 为 f 的反射.

若 $\tilde{f}=f$，则称 f 为偶分布；若 $\tilde{f}=-f$，则称 f 为奇分布.

4. 分布与函数的乘积

若 $f\in D^*(\Omega)$，$a\in C^\infty(\Omega)$，则 af 定义为一个 $D^*(\Omega)$分布，满足

$$\langle af,\varphi\rangle = \langle f,a\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\Omega), \tag{3.5}$$

这里$(a\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)$为通常函数的乘积. 进而，容易证明：若 $f_j\in D^*(\Omega)$，$f_j\to 0$，则 $af_j\in D^*(\Omega)$且 $af_j\to 0$. 我们称满足这个条

件的函数所生成的空间为乘子空间. 因此 $D^*(\Omega)$的乘子空间为 $C^\infty(\Omega)$，而 $a\in C^\infty(\Omega)$为 $D^*(\Omega)$的一个乘子.

例如，取 $a(x)=x,\delta\in D^*(\Omega)$，则 $x\delta\in D^*(\Omega)$是一个零分布，因为

$$\langle a\delta,\varphi\rangle = \langle \delta,a\varphi\rangle = a(x)\varphi(x)\,|_{x=0},$$

当取 $a(x)=x$ 时，恒有 $x\varphi(x)\,|_{x=0}=0$. 有趣的是，这里出现了"零因子".

5. 分布的导数

若 $f\in D^*(\Omega)$，则 $\partial_{x_j}f$ 定义为一个 $D^*(\Omega)$分布，满足

$$\langle \partial_{x_j}f,\varphi\rangle = -\langle f,\partial_{x_j}\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\Omega),\qquad (3.6)$$

这里 $\partial_{x_j}\varphi(x)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)$ 为通常函数的导数，我们称 $\partial_{x_j}f$ 为分布 f 的导数. 一般地，对指标 α，定义

$$\langle \mathrm{D}^\alpha f,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f,\mathrm{D}^\alpha\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\Omega),\qquad (3.7)$$

并且称 $\mathrm{D}^\alpha f$ 为分布 f 的 α 阶导数.

上述有关分布的运算，以及下节中的 Fourier 变换，如果用对偶算子理论统一起来，在新的高度上研究它们，就更加完美了. 关于经典对偶算子理论，在泛函分析教程中已有详细的论述，希望有兴趣的读者自己阅读参考书目[15]与[16].

关于分布的导数，我们有如下性质.

定理 3.6 $D^*(\Omega)$分布为无穷次可导分布，并且结果与求导次序无关，例如

$$\partial^2_{x_ix_j}f = \partial^2_{x_jx_i}f,$$

等等.

例 3.3 我们有 $H'=\delta$. 事实上，

$$\begin{aligned}\langle H',\varphi\rangle &= -\langle H,\varphi'\rangle\\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

注意到在上述那些分布的运算的定义中，例如对于 $\partial_{x_j}f$，它被

定义为满足等式

$$\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = - \langle f, \partial_{x_j} \varphi \rangle$$

的一个分布.但满足此等式的 $\partial_{x_j} f$ 是否确是一个分布,在理论上还需要证明:当 $\{\varphi_k\} \subset D(\Omega)$ 且 $\varphi_k \to 0$ 时,蕴涵 $\langle \partial_{x_j} f, \varphi_k \rangle \to 0$. 而实际上,$D(\Omega)$ 的弱* 拓扑保证了这一点.

定理 3.7 设 $f_j, f \in D^*(\Omega)$,且

$$\lim_{j \to 0} \langle f_j, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega),$$

则 $\omega^* - \lim\limits_{j \to \infty} f_j = f$,并且对任意 α,有

$$\omega^* - \lim_{j \to \infty} \mathrm{D}^\alpha f_j = \mathrm{D}^\alpha f.$$

6. 分布的支集

若 $f \in D^*(\Omega)$,对于 Ω 的一开子集 V,如果等式

$$\langle f, \varphi \rangle = 0$$

对所有 $\varphi \in D(\Omega)$,且 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V$ 都成立,则称 f 在 V 上为零.

由定义可证得:设 $\{V_\iota\}_{\iota \in I} \subset \Omega$ 为一族开子集,又设 $f \in D^*(\Omega)$ 在每个 V_ι 上为 0,则 f 在并集 $\bigcup\limits_{\iota \in I} V_\iota$ 上为 0. 因此我们可定义 f 的支集如下.

对于 $f \in D^*(\Omega)$,设 $V \subset \Omega$ 是使 f 为 0 的最大开子集,亦即

$$V = \bigcup_{\iota \in I} V_\iota,$$

这里集族 $\{V_\iota\}_{\iota \in I}$ 是使得 f 为 0 的开子集 $V_\iota \subset \Omega$ 所成的集,则称 $\Omega \backslash V$ 为 f 的支集,记为 $\mathrm{supp}(f)$. 它是 Ω 中的相对闭子集.

例如,我们有 $\mathrm{supp}(\delta) = \{0\}$.

当一个 $D^*(\Omega)$ 分布 f 的支集 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集时,我们可以把它扩张到比 $D(\Omega)$ 更大的空间 $C^\infty(\Omega)$ 上去. 由定理 3.3,$C^\infty(\Omega)$ 是一个 Fréchet 空间,下面把它记为 $\mathscr{E}(\Omega)$. 为完成此扩张,先证一个引理.

引理 3.1 若 $f \in D^*(\Omega)$ 具有紧支集 K,则 f 必可以唯一的方式扩张成集合

$$E = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \cap K \text{ 为紧集}\}$$

上的连续线性泛函，记为 F，并且使当 $\text{supp}(\varphi) \cap K = \varnothing$ 时，

$$\langle F, \varphi \rangle = 0.$$

证 先证唯一性. 令 $\widetilde{K} = \text{supp}(\varphi) \cap K$. 作 $\widetilde{K}$ 在 Ω 中的两个开邻域 U 与 U_1，使 $\overline{U} \subset U_1$，则 $\mathscr{C}\overline{U}$ 与 U_1 构成 Ω 的开覆盖，记为

$$V_1 = U_1, \quad V_2 = \mathscr{C}\overline{U}.$$

于是，存在从属于 $\{V_1, V_2\}$ 的单位分解 $\{\psi_1, \psi_2\}$，使

$$\varphi = \psi_1\varphi + \psi_2\varphi \equiv \varphi_1 + \varphi_2,$$

且

$$\varphi_1 \in D(\Omega), \quad \text{supp}(\varphi_1) \subset V_1, \quad \text{supp}(\varphi_2) \subset V_2,$$

以及

$$\text{supp}(\varphi_2) \cap K = \varnothing.$$

因此，若 f 可扩张为 F，必有 $\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle$，故扩张是唯一的.

再证存在性. 如上，对每个 $\varphi \in E$，有分解式 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. 我们令

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle.$$

这实际上就给出了 F 对每个 $\varphi \in E$ 的作用. 进而，当 $\varphi = \varphi'_1 + \varphi'_2$ 时，也必有

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \varphi'_1 \rangle.$$

事实上，记 $\psi = \varphi_1 - \varphi'_1$，则 $\psi \in D(\Omega)$，且

$$K \cap \text{supp}(\psi) = K \cap \text{supp}(\psi_1 - \psi'_1) = \varnothing,$$

故 $\langle f, \psi \rangle = 0$. 这就是要证明的.

显然，当 $\text{supp}(f) = K$ 为紧集时，对任何 $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ 都有

$$\psi \in E = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \text{supp}\varphi \cap K \text{ 为紧集}\}.$$

于是，f 可唯一地扩张为 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的连续线性泛函 F，其值定义为

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle,$$

φ_1 为引理 3.1 中所定义的那样. 不仅如此，我们还能证明

定理 3.8 $\mathscr{E}^*(\Omega) = \{f \in D^*(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ 为紧集}\}$.

证 对 $f\in D^*(\Omega)$ 且 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集，由上所作的扩张 F 对每个 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$ 的作用为

$$\langle F,\varphi\rangle=\langle f,\varphi_1\rangle=\langle f,\psi_1\varphi\rangle,$$

并且其值与 ψ_1 的选取无关. 我们还要证明 F 是 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 事实上，对任意满足 $\mathrm{supp}(f)=K\subset K_1$ 的紧集 K_1，必存在函数 ψ_1，使 $\mathrm{supp}(\psi_1)\subset K_1$，且

$$|\langle F,\varphi\rangle|=|\langle f,\psi_1\varphi\rangle|\leqslant c_1\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha(\psi_1\varphi)|$$

$$\leqslant c_1\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_1}|\mathrm{D}^\alpha\varphi|,$$

其中 c_1 与 k 由 K_1 确定. 上不等式右边的上确界实为 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的半范数，故 F 在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上连续，即 $F\in\mathscr{E}(\Omega)$.

反之，设 $F\in\mathscr{E}^*(\Omega)$，则对某个紧子集 $K_1\subset\Omega$，存在 $c_1>0$ 与非负整数 k，使得

$$|\langle F,\varphi\rangle|\leqslant c_1\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_1}|\mathrm{D}^\alpha\varphi|.$$

将 F 限制在 $D(\Omega)$ 上，得到一个 $D^*(\Omega)$ 分布，这是因为，如果 $\varphi\in D(\Omega)$，且 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset K$，$K$ 为紧集，则

$$\sup_{K_1}|\mathrm{D}^\alpha\varphi|=\sup_{K\cap K_1}|\mathrm{D}^\alpha\varphi|\leqslant\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi|.$$

将其代入 $\langle F,\varphi\rangle$ 的估计式得

$$|\langle F,\varphi\rangle|\leqslant c_1\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_K|\mathrm{D}^\alpha\varphi|,$$

其中 $\varphi\in D(\Omega)$，$\mathrm{supp}(\varphi)\subset K$. 另一方面，$F_1\equiv F|_{D(\Omega)}$ 具有紧支集，且此紧支集 $\subset K_1$. 这是因为，如果 $\mathrm{supp}(\varphi)\cap K_1=\varnothing$ 成立，则 $\sup_{K_1}|\mathrm{D}^\alpha\varphi|=0$，故 $\langle F,\varphi\rangle=0$. 定理得证.

定理 3.9 $D(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{E}(\Omega)$ 及 $\mathscr{E}^*(\Omega)\hookrightarrow D^*(\Omega)$.

这里记号 $\hookrightarrow$ 是指连续嵌入. 亦即 $A\hookrightarrow B$ 是指：(1) $A\subset B$，表示 A 为 B 的子空间；(2) "$\varphi_n\to 0$ 在 A 中成立" 蕴涵 "$\varphi_n\to 0$ 在 B 中成立"；或等价地，恒同映射 $I: A\to B$ 为连续映射.

证 $D(\Omega)\subset\mathscr{E}(\Omega)$ 显然. 另一方面，任取 $\varphi_j\in D(\Omega)$，$j=1,2,$

$\cdots$，且 $\varphi_j \to 0$ 在 $D(\Omega)$ 中成立．则由定义 3.4 中的说明，存在紧集 $K \subset \Omega$，使 $\text{supp}(\varphi_j) \subset K$ 对 $j \in N$ 一致成立；并且对任意 α，$D^\alpha \varphi_j(x) \to 0$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立．于是，对 Ω 的任意紧子集 K_1，任意 α，必得 $D^\alpha \varphi_j \to 0$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立．按定义，这就是 $\varphi_j \to 0$ 在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中成立．故得 $D(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{E}(\Omega)$．

$\mathscr{E}(\Omega) \hookrightarrow D^*(\Omega)$ 的证明可由对偶理论得到．

7．卷积

大家知道，$\boldsymbol{R}^n$ 上两函数 f 与 g 的卷积定义为

$$(f * g)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y) g(x - y) \mathrm{d}y. \tag{3.8}$$

它有很多重要性质，并具有重要的物理意义．例如：

（1）当（3.8）式中积分存在时，我们有

$$(f * g)(x) = (g * f)(x),$$
$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x).$$

（2）设 $g \in C^k$，$f \in C_0$，则 $f * g \in C^k$，且

$$D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

（3）若 $f \in L^1$，$g \in L^p$，$p \geqslant 1$，则 $h = f * g \in L^p$，且

$$\| h \|_p \leqslant \| f \|_1 \cdot \| g \|_p.$$

这个不等式称为 Hausdorff-Young 不等式，它有如下推广：若 p，q，r 是实数，$1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$，还满足

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$

则当 $f \in L^p$，$g \in L^q$ 时，有 $f * g \in L^r$，并有

$$\| f * g \|_r \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q$$

成立．

（4）关于 $f * g$ 的支集，我们有

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$$
$$\equiv \{ x + y : x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g) \}.$$

（5）利用 Friedrich 软化子，将函数正则化，即对任意 $\Phi \in C_0^\infty$

且满足

$$0 \leqslant \Phi \leqslant 1, \quad \int_{R^n} \Phi(x) \mathrm{d}x = 1.$$

令

$$\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

则 $f \in L^p$ 蕴涵 $f_\varepsilon = \Phi_\varepsilon * f \in C^\infty$，且当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f_\varepsilon - f \|_p = 0.$$

进而，若 $f \in C_0^k$，则 $f_\varepsilon \in C_0^\infty$，且有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup |\mathrm{D}^\alpha f_\varepsilon - \mathrm{D}^\alpha f| = 0, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

现在让我们把卷积的概念推广到分布上去.

定义 3.4 设 $f \in D^*(\Omega)$，$\varphi \in D(\Omega)$，我们定义

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, \tilde{\varphi}_x \rangle,$$

其中 $\tilde{\varphi}_x(y) = \tilde{\varphi}(y - x) = \varphi(x - y)$.

为得到卷积的进一步的性质，先证一个引理.

引理 3.2 设 $\varphi(x,y) \in D(\Omega_y)$，视 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 为参数. 设

$$\operatorname{supp}_y \varphi(x,y) \subset K,$$

这里 $\overline{K} \subset \Omega_y$，且当 x 在某个开集 U 中变动时，K 与 x 无关. 又设对任意重指标 α 与 β，导数 $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)$ 关于 x 与 y 均连续，则对任意 $f \in D^*(\Omega_y)$，函数

$$F(x) = \langle f, \varphi(x,y) \rangle$$

关于 $x \in U$ 的连续导数 $\partial_x^\alpha F(x) = \langle f, \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \rangle$ 存在.

证 仅对 $\alpha = 1$ 与 $x \in U \subset \boldsymbol{R}^1$ 情形加以证明. 取 $x + h \in U$，且

$$\operatorname{supp}_y \left(\frac{1}{h} [\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y)] \right) \subset K.$$

显见

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} [\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y)] \\ &\quad = \partial_x \varphi(x + th, y), \quad 0 < t < 1, \end{aligned}$$

当 $h \to 0$ 时，上述表示式在 $D(\Omega_y)$ 中趋于 $D_x\varphi(x,y)$. 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\langle f, \frac{1}{h}[\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y)]\right\rangle$$

$$= \langle f, \partial_x\varphi(x,y)\rangle.$$

其他情形可类似地证明.

定理 3.10 设 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$, $\varphi\in D(\Omega)$, 则 $f*g\in C^\infty(\Omega)$, 且

$$\mathrm{supp}(f*\varphi) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(\varphi).$$

证 由引理 3.2 得到 $f*g\in C^\infty(\Omega)$. 关于支集的包含关系证明如下.

设 $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(\varphi)$, 则当 $y\in \mathrm{supp}(f)$ 时,

$$x - y \notin \mathrm{supp}(\varphi).$$

因若不然, 则

$$x \in \{y\} + \mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(\varphi).$$

于是 $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(\varphi)$ 蕴涵

$$\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(\varphi(x - \cdot)) = \varnothing.$$

故 $f*\varphi$ 在 x 的附近为 0. 定理得证.

定理 3.11 若 $f\in D^*(\Omega)$, $\varphi,\psi\in D(\Omega)$, 则

$$(f*\varphi)*\psi = f*(\varphi*\psi).$$

证 先证这样一个事实: 若 $\varphi\in C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$, $\psi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, 则 Riemann 和

$$\sum_m \varphi(x - mh)\psi(mh)h^n \quad (h\in \boldsymbol{R}^n)$$

在 $C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$ 中收敛于 $(\varphi*\psi)(x)$.

上述收敛性当 x 为固定点时是明显的(据 Riemann 积分的定义), 现在证明它在空间 $C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$ 中收敛. 其实, 由于 φ 与 ψ 都具紧支集, 因此上述 Riemann 和对充分小的 h, 支集含于 $\mathrm{supp}(\psi)+\mathrm{supp}(\psi)$. 其次, 对任意 $\alpha\leqslant k$, 上述和关于 x 的 α 阶导数一致趋于

$$\int \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y = (\partial_x^\alpha \varphi * \psi)(x).$$

为完成定理的证明，只需作如下推理：

$$\begin{aligned} f*(\varphi*\psi)(x) &= \langle f_y, (\varphi*\psi)(x-y)\rangle \\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle f_y, \sum_m \varphi(x-y-mh)\psi(mh)h^n\right\rangle \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sum_m \langle f_y, \varphi(x-y-mh)\rangle \psi(mh)h^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\sum_m (f*\varphi)(x-mh)\psi(mh)h^n \\ &= (f*\varphi)*\psi(x), \end{aligned}$$

其中 f_y 表示 f 作用于 $\varphi(x-y-mh)$ 中的 y. 定理得证.

定理 3.12 设 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$f*\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n);$$

且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = f \quad 在\ D^*(\boldsymbol{R}^n)\ 中,$$

这里 Φ_ε 为 200 页(5)中所述的 Friedrich 软化子，即

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\Phi(x/\varepsilon), \quad \Phi\in C_0^\infty,$$

且满足

$$0\leqslant \Phi \leqslant 1, \quad \int_{\boldsymbol{R}^n}\Phi\mathrm{d}x = 1.$$

证 利用下述等式：

$$\begin{aligned} \langle f_\varepsilon, \varphi\rangle &= (f_\varepsilon * \tilde{\varphi})(0) = (f*\Phi_\varepsilon * \tilde{\varphi})(0) \\ &= \langle f, (\Phi_\varepsilon * \tilde{\varphi})^\vee\rangle, \quad \varphi\in D(\boldsymbol{R}^n). \end{aligned}$$

据定理 3.10，$f_\varepsilon\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，而据(5)知 $\Phi_\varepsilon * \tilde{\varphi}$ 的各阶导数都一致收敛于 $\tilde{\varphi}$ 的相应阶导数，并且

$$\mathrm{supp}(\Phi_\varepsilon * \tilde{\varphi}) \subset \mathrm{supp}\Phi_\varepsilon + \mathrm{supp}\varphi,$$

当 ε 充分小时，上式右边必含在 $\mathrm{supp}\,\tilde{\varphi}$ 的某个固定邻域内. 于是

$$\Phi_\varepsilon * \tilde{\varphi}(x) \to \tilde{\varphi}(x)$$

在 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 中成立. 最后得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f,(\Phi_\varepsilon * \widetilde{\varphi})^\vee(x)\rangle = \langle f,\varphi\rangle.$$

定理得证.

上述定理对 $f\in D^*(\Omega)$ 也成立,但证明稍复杂,我们从略.

定义 3.4 是一个分布 $f\in D^*(\Omega)$ 与一个函数 $\varphi\in D(\Omega)$ 的卷积. 现在我们定义两个分布的卷积.

定义 3.5 设 $f,g\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,且至少有一个,例如 g,具紧支集. 我们定义 $f*g$ 为满足下式的一个 $D^*(\boldsymbol{R}^n)$ 分布

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f,\langle g,\varphi_{-x}\rangle\rangle,\quad \varphi\in D(\boldsymbol{R}^n),$$

这里 $\varphi_{-x}(y)=\varphi(y-x)$ 是 φ 的右平移.

为说明上述定义有意义,我们证明

(1) 作为 x 的函数,$\psi(x)=\langle g,\varphi_{-x}\rangle\in D(\boldsymbol{R}^n)$.

其实,据定理 3.10 知,函数

$$\psi(x) = \langle g,\varphi_{-x}\rangle = \langle \widetilde{g},\widetilde{\varphi}_{-x}\rangle = \widetilde{g}*\varphi(x)$$

属于 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 其次,$\text{supp}(\psi)\subset\text{supp}(\widetilde{g})+\text{supp}(\varphi)$ 给出 $\text{supp}(\psi)$ 为紧集,故 $\psi\in D(\boldsymbol{R}^n)$.

(2) 由 $\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,\psi\rangle$ 定义的 $f*g$ 为 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 上的连续线性泛函.

显然它是线性的,并且是 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 上的泛函. 为证连续性,设在 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 中,$\varphi_j\to 0$. 由引理 3.2 知,$\psi_j(x)=\langle g,(\varphi_j)_{-x}\rangle\to 0$ 在 $D(\boldsymbol{R}^n)$ 中成立,从而

$$\langle f*g,\varphi_j\rangle \to 0,$$

所以 $f*g\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$.

我们指出,为引入分布的卷积 $f*g$,在上述定义 3.5 中,"f 与 g 二者至少有一个具紧支集"的条件还可以减弱. 详细情况就不再叙述了(见参考书目[12]和[15]).

定理 3.13 设 $f,g,h\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,且其中至少有一个具紧支集,以保证以下所述卷积有意义,则

(1) 结合律: $f*(g*h)=(f*g)*h$;

(2) 交换律：$f * g = g * f$；

(3) 分配律：

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h;$$

(4) 单位元：$f * \delta = \delta * f$.

由此可知，$D^*(\boldsymbol{R}^n)$中具紧支集的元所生成的子集$\mathscr{E}^*(\boldsymbol{R}^n)$关于加法、数乘与卷积成为一个可交换代数，其单位元为δ.

证 (1) 任取$\varphi \in D(\boldsymbol{R}^n)$，我们有

$$\langle f * (g * h), \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \langle h, (\varphi_{-y})_{-x} \rangle \rangle \rangle$$
$$= \langle f * g, \langle h, \varphi_{-y} \rangle \rangle = \langle (f * g) * h, \varphi \rangle,$$

故$f * (g * h) = (f * g) * h$.

(2) 任取$\varphi, \psi \in D(\boldsymbol{R}^n)$，则$\varphi * \psi \in D(\boldsymbol{R}^n)$. 于是

$$(f * g) * (\varphi * \psi) = (f * g) * (\psi * \varphi)$$
$$= f * (g * \psi) * \varphi$$
$$= (f * \varphi) * (g * \psi) = (g * \psi) * (f * \varphi)$$
$$= (g * f) * (\psi * \varphi)$$
$$= (g * f) * (\varphi * \psi).$$

以上推导中我们利用了结合性以及函数卷积的交换性，因为$f * \varphi$与$g * \psi$都属于空间$C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，故

$$(g * \psi) * \varphi = \varphi * (g * \psi);$$
$$(f * \varphi) * (g * \psi) = (g * \psi) * (f * \varphi);$$

对$(g * f) * (\psi * \varphi)$作同样的推导，得出

$$(g * f) * (\psi * \varphi) = (g * \psi) * (f * \varphi).$$

为了最后得到可交换性，我们证明，若$f_1, f_2 \in D^*(\boldsymbol{R}^n)$对任意$\varphi \in D(\boldsymbol{R}^n)$都有

$$f_1 * \varphi = f_2 * \varphi,$$

则$f_1 = f_2$. 事实上，

$$\langle f_1, \varphi \rangle = (f_1 * \tilde{\varphi})(0) = f_2 * \tilde{\varphi}(0) = \langle f_2, \varphi \rangle.$$

从而，$f_1 = f_2$. 把此结论用于

$$(f * g) * (\varphi * \psi) = (g * f) * (\varphi * \psi),$$

便得到 $f*g=g*f$.

(3) 显然.

(4) $\mathrm{supp}(\delta)$为紧集,故对一切 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$, $f*\delta$ 有意义,据(2), $f*\delta=\delta*f$. 现在任取 $\varphi\in D(\boldsymbol{R}^n)$,由

$$\delta*\varphi(x)=\langle\delta,\tilde{\varphi}_x\rangle=\tilde{\varphi}_x(0)=\varphi(x),$$

得

$$(f*\delta)*\varphi=f*(\delta*\varphi)=f*\varphi.$$

仿照(2),推得 $f*\delta=f$,即(4)得证.

若我们用 τ_h 记平移算子:对 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数 $f(x)$,定义

$$(\tau_h f)(x)=f(x-h).$$

按照前面关于分布的运算(3),分布 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$的平移定义为

$$\langle\tau_h f,\varphi\rangle=\langle f,\tau_{-h}\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\boldsymbol{R}^n), \tag{3.9}$$

我们有

定理 3.14 对 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,有 $\tau_h f=\delta_h*f$,这里 $\delta_h\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$ 定义为

$$\langle\delta_h,\varphi\rangle=\varphi(h). \tag{3.10}$$

于是,如下论断成立:

(1) 卷积与平移的可换性:对任意 $f,g\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,

$$f*\tau_h g=\tau_h f*g=\tau_h(f*g);$$

(2) 反之,设 $T:D(\boldsymbol{R}^n)\to\mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$为连续线性算子. 若 T 与一切平移算子可换:

$$T\tau_h=\tau_h T,$$

则存在唯一的 $f\in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,使得 $T\varphi=f*\varphi$ 对于所有 $\varphi\in D(\boldsymbol{R}^n)$成立.

证 先证 $\tau_h f=\delta_h*f$. 任取 $\varphi\in D(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\begin{aligned}\langle\delta_h*f,\varphi\rangle&=\langle f*\delta_h,\varphi\rangle=\langle f,\langle\delta_h,\tilde{\varphi}_x\rangle\rangle\\&=\langle f,\tilde{\varphi}(h)\rangle=\langle f,\tau_{-h}\varphi\rangle=\langle\tau_h f,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

于是, $\delta_h*f=\tau_h f$.

为证(1),任取 $\varphi \in D(\boldsymbol{R}^n)$,则

$$\begin{aligned}\langle \tau_h(f * g), \varphi\rangle &= \langle f * g, \tau_{-h}\varphi\rangle = \langle f, \langle g, (\tau_{-h}\varphi)_{-x}\rangle\rangle \\ &= \langle f, \langle g, \tau_{-h}(\varphi_{-x})\rangle\rangle \\ &= \langle f, \langle \tau_h g, \varphi_{-x}\rangle\rangle = \langle f * \tau_h g, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

此即 $\tau_h(f * g) = f * \tau_h g$;同理也有

$$\tau_h(f * g) = \tau_h f * g.$$

对于(2),先证唯一性.因为若存在这样的 f,则必有

$$\langle f, \tilde{\varphi}\rangle = (f * \varphi)(0) = (T\varphi)(0), \quad \varphi \in D(\boldsymbol{R}^n),$$

故 f 是唯一的.关于存在性,我们证明,对任何 $\varphi \in D(\boldsymbol{R}^n)$,由公式

$$(T\varphi)(0) = \langle f, \tilde{\varphi}\rangle$$

定义的 f,亦即 $f: \varphi \leftrightarrow \tilde{\varphi} \to (T\varphi)(0)$,是满足(2)所要求的连续线性泛函.因为 T 的连续性与线性,知上述 f 是一个 $D^*(\boldsymbol{R}^n)$ 分布.进而,利用 T 与 τ_{-h} 的可换性,得

$$\begin{aligned}(T\varphi)(h) &= \tau_{-h}(T\varphi(0)) = (T\tau_{-h}\varphi)(0) \\ &= (f * \tau_{-h}\varphi)(0) = (f * \varphi)(h).\end{aligned}$$

由于 h 的任意性,(2)得证.

关于卷积的微分,我们有

定理 3.15 设 $f, g \in D^*(\boldsymbol{R}^n)$,且 $\mathrm{supp}(g)$ 为紧集,则对任意指标 α,有

$$\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g.$$

证 任取 $\varphi \in D(\boldsymbol{R}^n)$,则

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(f * g), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle f * g, \partial^\alpha\varphi\rangle \\ &= \langle f, (-1)^{|\alpha|}\langle g, (\partial^\alpha\varphi)_{-x}\rangle\rangle \\ &= \langle f, (-1)^{|\alpha|}\langle g, \tau_{-x}(\partial^\alpha\varphi)\rangle\rangle \\ &= \langle f, (-1)^{|\alpha|}\langle g, \partial^\alpha(\tau_{-x}\varphi)\rangle\rangle \\ &= \langle f, \langle \partial^\alpha g, \varphi_{-x}\rangle\rangle \\ &= \langle f * \partial^\alpha g, \varphi_{-x}\rangle.\end{aligned}$$

等式另一部分可类似地得到.

最后,关于卷积的支集,我们也可写出:当 $f, g \in D^*(\boldsymbol{R}^n)$时,

$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g).$$

还可以讨论分布的张量积、流形上的分布等等，但已属专门课题，本教材不再进行介绍.

§4 Fourier 分析

由于 Fourier 分析在分析理论中的重要性，人们自然想到在分布空间上建立 Fourier 分析理论. 如上节开始所述，分布理论形成的思想根源之一就是希望推广经典的 Fourier 分析理论到更广泛的空间上去. 大家知道，经典 Fourier 分析理论所能适用的函数空间是很小的，例如能使 Fourier 变换在其上拓扑同构的函数空间仅是所谓的急降函数空间. 本节的目的是要建立分布空间上的 Fourier 分析的基本理论. 为此，先从经典的急降函数空间 $\mathscr{S}$ 开始. 我们称 $\mathscr{S}$ 为急降函数空间，或 Schwartz 空间；它是这样定义的

$$\mathscr{S} = \{\varphi \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^n) : \sup |x^{\alpha} \mathrm{D}^{\beta} \varphi(x)| < +\infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}^n\}. \tag{4.1}$$

在 $\mathscr{S}$ 上引入半范数族 $\{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}^n\}$，其中

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |x^{\alpha} \mathrm{D}^{\beta} \varphi(x)|, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}^n, \tag{4.2}$$

空间 $\mathscr{S}$ 有以下的重要性质.

定理 4.1 $\mathscr{S}$ 是一个 Fréchet 空间.

证 注意到当 $|x| \to \infty$ 时，每个 $\varphi \in \mathscr{S}$ 以比 $|x|$ 的任意次数更快的速度趋于 0，故在(4.2)式定义的半范数族下，$\mathscr{S}$ 成为 Fréchet 空间. 特别指出，"$\varphi_j \to 0$ 在 $\mathscr{S}$ 中"是指对任意选定的指标 α, β，有

$$x^{\alpha} \mathrm{D}^{\beta} \varphi_j(x) \to 0, \quad x \in \boldsymbol{R}^n$$

一致地成立(对 x 一致，但却不要求对 α, β 一致).

定理 4.2 $D(\boldsymbol{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$，且 $D(\mathscr{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密，$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 在 $\mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密.

读者记得，在经典 Fourier 分析中，从 $f\in L^1$ 开始，定义其 Fourier 变式 $f^\wedge$；然后用截断的方法，把 L^2 函数的 Fourier 变式 $f^\wedge$ 定义为 L^2 中一个函数列的平均极限；再由 Riesz-Thorin 凸性定理，将 Fourier 变式的定义扩充到 L^p 函数，$1<p<2$. 一般说来，对于 L^p，$p>2$ 的情形，上述思想已无法使用. 此时我们要设法推广经典的 Fourier 变式到适当的分布空间上，使得在这种推广之下的 Fourier 变式，一方面可以解决包括 $L^p(p>2)$ 在内的更广泛的函数类直至分布的 Fourier 变换，另一方面也使得经典的 Fourier 变式是推广后的 Fourier 变换的特例.

现在我们先考虑 $f\in\mathscr{S}$ 的 Fourier 变式 $f^\wedge$，利用 $f^\wedge$ 是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 的拓扑同构，研究其一系列性质，然后利用对偶理论，直接定义 $\mathscr{S}^*$ 分布的 Fourier 变式.

为了方便起见，本节中我们都约定微分算子 D 中已带有因子 $\frac{1}{i}$，例如

$$\mathrm{D}_x=(\mathrm{D}_{x_1},\cdots,\mathrm{D}_{x_n})=\left(\frac{1}{i}\partial_{x_1},\cdots,\frac{1}{i}\partial_{x_n}\right).$$

定义 4.1 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的 Fourier 变式 $\varphi^\wedge$ 定义为

$$\varphi^\wedge(\xi)=\int_{R^n}\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n, \tag{4.3}$$

其中

$$\langle\xi,x\rangle=\sum_{i=1}^n\xi_ix_i,$$

记 $F:\varphi\to\varphi^\wedge$，称映射 F 为 $\mathscr{S}$ 上的 Fourier 变换，而称 $\varphi^\wedge$ 为 φ 的 Fourier 变式.

定理 4.3 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，则 $\varphi^\wedge\in\mathscr{S}$，且

$$(\mathrm{D}^\alpha\varphi)^\wedge(\xi)=\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi),\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n, \tag{4.4}$$

$$(x^\alpha\varphi)^\wedge(\xi)=(-\mathrm{D}_\xi)^\alpha\varphi^\wedge(\xi),\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n, \tag{4.5}$$

证 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，由

$$\sup_{R^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < +\infty, \quad \alpha,\beta \in \boldsymbol{P}^n,$$

$\mathscr{S}$ 是急降函数类，可在(4.3)式的积分号下求导数，得

$$D_\xi^\alpha \varphi^\wedge(\xi) = \int_{R^n} e^{-i(x,\xi)}(-x)^\alpha \varphi(x)dx, \tag{4.6}$$

于是 $(x^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = (-D_\xi)^\alpha\varphi^\wedge(\xi)$. 另一方面，由分部积分得

$$\begin{aligned}\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi) &= \int(-D_x)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\varphi(x)dx \\ &= \int e^{-i(x,\xi)}D_x^\alpha\varphi(x)dx.\end{aligned} \tag{4.7}$$

依此有 $(D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi)$. 这样我们得到(4.4)与(4.5)式. 进而，由(4.6)与(4.7)式得

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha D_\xi^\beta\varphi^\wedge(\xi)| &= \left|\xi^\alpha\int e^{-i(x,\xi)}(-x)^\beta\varphi(x)dx\right| \\ &= |\xi^\alpha[(-\,\cdot)^\beta\varphi(\cdot)]^\wedge(\xi)| \\ &= \left|\int e^{-i(x,\xi)}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]dx\right| \\ &= \left|\int e^{-i(x,\xi)}(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}\right. \\ &\qquad \left.\cdot(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]dx\right| \\ &\leqslant c\sup_{x\in R^n}|(1+|x|^2)^{(n+1)/2}D_x^\alpha[(-x)^\beta\varphi(x)]| \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

故 $\varphi^\wedge\in\mathscr{S}$. 定理得证.

从上述定理立即得到

定理 4.4 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，则

$$D_\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi) = [(-\,\cdot)^\alpha\varphi(\cdot)]^\wedge(\xi),$$

$$\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi) = (D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi).$$

而且，若在 $\mathscr{S}$ 中，$\varphi_j\to 0$，则必有 $\varphi_j^\wedge\to 0$ (在 $\mathscr{S}$ 中)，因此 Fourier 变换 $F: \varphi\to\varphi^\wedge$ 是 $\mathscr{S}$ 到自身的连续线性映射.

Fourier 变换 F 有如下逆变换公式.

定理 4.5 对于 $\varphi\in\mathscr{S}$,我们有 Fourier 变换反演公式

$$F^{-1}:\varphi^{\wedge}\to\varphi,$$

其中

$$\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi^{\wedge}(\xi)d\xi, \tag{4.8}$$

并且 $F:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 为拓扑同构.

证 首先取 Gauss 函数

$$g(x)=e^{-|x|^2/2},\quad |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

显然有 $g\in\mathscr{S}$,且

$$g^{\wedge}(\xi)=\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-|x|^2/2}dx=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}. \tag{4.9}$$

(4.9)式成立,是因为

$$\int_{R^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-|x|^2/2}dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{R}e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}dx_j,$$

而由 Cauchy 积分定理,每个因子

$$\int_{R}e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}dx_j=e^{-\xi_j^2/2}\int_{R}e^{-\frac{1}{2}(x_j+i\xi_j)^2}dx$$

$$=e^{-\xi_j^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=e^{-\xi_j^2/2}\sqrt{2\pi}.$$

于是,

$$\int\varphi^{\wedge}(\xi)g(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=\int g(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\varphi(y)dy$$

$$=\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}g(\xi)\varphi(y)d\xi dy$$

$$=\int g^{\wedge}(y-x)\varphi(y)dy$$

$$=\int g^{\wedge}(y)\varphi(x+y)dy.$$

以 $g(\varepsilon\xi)$ 代替 $g(\xi)$,$\varepsilon>0$,则上式成为

$$\int\varphi^{\wedge}(\xi)g(\varepsilon\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

$$= \varepsilon^{-n}\int g^{\wedge}(\varepsilon^{-1}y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int g^{\wedge}(y_1)\varphi(x+\varepsilon y_1)\mathrm{d}y_1.$$

令 $\varepsilon \to 0$，得

$$g(0)\int \varphi^{\wedge}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi = \varphi(x)\int g^{\wedge}(y_1)\mathrm{d}y_1.$$

再由 $g(0)=1$，并重写(4.9)式为

$$g^{\wedge}(y_1) = (2\pi)^{n/2}\mathrm{e}^{-|y_1|^2/2}, \tag{4.10}$$

便得

$$\int g^{\wedge}(y_1)\mathrm{d}y_1 = (2\pi)^{n/2},$$

代入上式即得(4.8)式. 在以上推理过程中我们用到 Fubini 定理与积分号下求极限，由于 $\varphi,\varphi^{\wedge},g,g^{\wedge}$ 都在 $\mathscr{S}$ 中，故这是允许的.

上述定理的结论也记为

$$F^{-1}(\varphi^{\wedge}) = (2\pi)^{-n}F((\varphi^{\wedge})^{\sim}).$$

所以，F^{-1}是 F 的逆变换，并为一对一，且双方连续. 据反射运算 $\sim$: $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(-x)$是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 上的同构，从而得到 $F: \mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 为拓扑同构. 定理得证.

Fourier 变换有如下性质.

定理 4.6 设 $\varphi\in\mathscr{S}$，则

(1) $F(\tilde{\varphi}) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)$，$\widetilde{F}(\varphi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)$；

(2) $F(\tau_h\varphi)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle h,\xi\rangle}F(\varphi)(\xi)$，

$\tau_h(F(\varphi)(\xi)) = F[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\cdot,h\rangle}\varphi(\cdot)](\xi)$；

(3) $F(\varphi(c\,\cdot))(\xi) = |c|^{-n}F(\varphi)(c^{-1}\xi)$，$c\neq 0$，

$F(\varphi)(c\xi) = c^{-n}F(\varphi(c^{-1}\,\cdot))(\xi)$，$c\neq 0$.

定理 4.7 设 $f,g\in\mathscr{S}$，则 $f*g\in\mathscr{S}$，且

$$F(f*g) = F(f)\cdot F(g),$$

$$F(f\cdot g) = (2\pi)^{-n}F(f)*F(g).$$

证 由定义

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y,$$

因 $f,g\in\mathscr{S}$,故上式积分存在. 由 Young 不等式知

$$f*g\in L^1(\boldsymbol{R}^n).$$

再据积分号下可对 x 作任意多次求导运算,知

$$f*g\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

余下只要证明 $f*g\in\mathscr{S}$. 考虑如下积分,并由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}(f*g)(x)\mathrm{d}x\\ &=\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}f(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,\xi\rangle}g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &=\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}f(x)\mathrm{d}x\cdot\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,\xi\rangle}g(y)\mathrm{d}y\\ &=f^\wedge(\xi)\cdot g^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

由于 $f^\wedge,g^\wedge\in\mathscr{S}$,而 $\mathscr{S}$ 关于元的乘法运算是封闭的,故

$$f^\wedge\cdot g^\wedge\in\mathscr{S}.$$

利用 Fourier 逆变换 $F^{-1}:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 为拓扑同构,则

$$\begin{aligned}F^{-1}(f^\wedge\cdot g^\wedge)(x)&=(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}f^\wedge(\xi)g^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}f^\wedge(\xi)\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,\xi\rangle}g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\\ &=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}f^\wedge(\xi)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi\\ &=\int g(y)\mathrm{d}y\cdot(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}f^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=(f*g)(x).\end{aligned}$$

定理 4.8(Parseval 等式) 若 $f,g\in\mathscr{S}$,则

$$\int f^\wedge(x)g(x)\mathrm{d}x=\int f(\xi)g^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{4.11}$$

或

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\int f^\wedge(\xi)\,\overline{g^\wedge(\xi)}\mathrm{d}\xi.\tag{4.12}$$

证 考虑二重积分

$$\iint f(\xi)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi,$$

它是绝对收敛的. 据 Fubini 定理，将它写为两个次序不同的累次积分，便得(4.11)式. 再由(4.11)式，将 $g(x)$ 换为 $(2\pi)^{-n}\overline{g^{\wedge}(x)}$，则 $g^{\wedge}(\xi)$ 应改为

$$\begin{aligned}[(2\pi)^{-n}\overline{g^{\wedge}(\cdot)}]^{\wedge}(\xi) &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\,\overline{g^{\wedge}(x)}\mathrm{d}x \\ &= (2\pi)^{-n}\overline{\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}g^{\wedge}(x)\mathrm{d}x} = (2\pi)^{-n}\overline{g(\xi)}.\end{aligned}$$

从而由(4.11)式便得(4.12)式. 定理得证.

转而讨论 $\mathscr{S}^*$ 分布，以及其上的 Fourier 变换.

定义 4.2 $\mathscr{S}$ 空间上的连续线性泛函称为 $\mathscr{S}^*$ 分布，又称缓增分布，记 $\mathscr{S}^*$ 分布的全体为 $\mathscr{S}^*$，称为 $\mathscr{S}$ 的分布空间. 由 $\mathscr{S}$ 上的半范数族的定义(见定理 4.1)，知 $f\in\mathscr{S}^*$，当且仅当存在非负整数 k,m 与常数 $c=c_{k,m}$，使对每个 $\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k,\,|\beta|\leqslant m}\sup_{R^n}|x^{\alpha}\mathrm{D}^{\beta}\varphi(x)|. \tag{4.13}$$

先举一些例子.

例 4.1 $L^p(\boldsymbol{R}^n)\subset\mathscr{S}^*$.

任取 $g\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$，由

$$|\langle g,\varphi\rangle| = \left|\int\varphi(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|g\|_p\|\varphi\|_q,$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

但因 $\mathscr{S}\subset L^r(\boldsymbol{R}^n)$ 对任意 $r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 成立，且

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_q &= \left(\int|\varphi(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\ &=\leqslant \sup_{R^n}(1+|x|^2)^{(n+1)/2q}|\varphi(x)|\end{aligned}$$

$$\cdot\left(\int(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$\leqslant c\sup_{R^n}(1+|x|^2)^{(n+1)/2q}|\varphi(x)|,$$

故知存在常数 $k,m\in P$ 及 $c_{k,m}$，使 $\langle g,\varphi\rangle$ 满足(4.13)式.

例 4.2 $\mathscr{O}_M^n(\boldsymbol{R}^n)\subset\mathscr{S}^*$，这里集合 $\mathscr{O}_M^n(\boldsymbol{R}^n)$ 是

$$\{f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n):\forall\alpha\in\boldsymbol{P}^n,\exists\ C(\alpha)\text{ 与 }N(\alpha),\text{使}$$
$$|D^\alpha f(x)|\leqslant C(\alpha)(1+|x|^2)^{N(\alpha)}\}.$$

只需按例 4.1 的方法估计 $\langle g,\varphi\rangle$，由 $g\in\mathscr{O}_M^n(\boldsymbol{R}^n)$ 与 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的条件而得(4.13)式，故

$$\mathscr{O}_M^n\equiv\mathscr{O}_M^n(\boldsymbol{R}^n)\subset\mathscr{S}^*..$$

空间 $\mathscr{O}_M^n$ 称为缓增 C^∞ 函数空间.

例 4.3 一切在∞处具有多项式增长性的连续函数

$$f(x)=O(1)|x|^N,\quad|x|\to+\infty$$

都定义一个 $\mathscr{S}^*$ 分布，当然它也是一个 D^* 分布，从而也有分布意义下的导数 $D^\alpha f$，而且导数 $D^\alpha f$ 也都是 $\mathscr{S}^*$ 分布.

定理 4.9 $\mathscr{E}^*(\boldsymbol{R}^n)\hookrightarrow\mathscr{S}^*\hookrightarrow D^*(\boldsymbol{R}^n)$.

由定理 4.2 即可证得.

定理 4.10 若 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{O}_M^n$，则 $gf\in\mathscr{S}^*$（亦即 $\mathscr{O}_M^n$ 中的元是 $\mathscr{S}^*$ 乘子）. 反之，$\mathscr{S}^*$ 分布的乘子必是 $\mathscr{O}_M^n$ 中的元.

（关于乘子，属于调和分析的专门课题，这里只提此名词，不作介绍，有兴趣的读者可参考有关书目（如参考书目[3]和[12]）.）

证 按定义，$\mathscr{S}^*$ 分布的乘子 g 满足

$$\langle gf,\varphi\rangle=\langle f,g\varphi\rangle\quad(\varphi\in\mathscr{S})$$

而 $g\varphi\in\mathscr{S}$ 显然成立，且

$$p_{\alpha\beta}(g\varphi)=\sup_{R^n}|x|^\alpha D^\beta(g\varphi)\leqslant\sum_{|r|\leqslant|\beta|}p_{\alpha+N,r}(\varphi),$$

故 $gf\in\mathscr{S}^*$. 定理的逆论断的证明还要涉及较多的预备知识，我们不再证明了. 只强调一下，空间 $\mathscr{O}_M^n$ 的拓扑结构. $\mathscr{O}_M^n$ 的拓扑由一族半范数

$$p_{f,\alpha}(\varphi) = \sup_{R^n} |f(x)\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)|$$

确定，其中 $f \in \mathscr{S}$，$\varphi \in \mathscr{O}_M^n$，$\alpha \in \boldsymbol{P}^n$. 它只是一个局部凸的拓扑空间，并且是完备的，但却不具有可数基. 序列 $\varphi_j \to 0$（在 $\mathscr{O}_M^n$ 中）当且仅当对每个 $f \in \mathscr{S}$ 与 $\alpha \in \boldsymbol{P}^n$，序列 $f(x)\mathrm{D}^\alpha \varphi_j(x) \to 0$ 关于 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 是一致的；或等价地，对每个 $f \in \mathscr{S}$，序列 $f\varphi_j \to 0$ 在 $\mathscr{S}$ 中成立.

再叙而不证一个有用的定理.

定理 4.11 $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{O}_M^n \hookrightarrow \mathscr{S}^*$，并且 $\mathscr{S}$ 在 $\mathscr{O}_M^n$ 中稠密.

现在我们来完成本节开始所提的问题：建立分布空间 $\mathscr{S}'$ 上的 Fourier 分析理论.

定义 4.3 若 $f \in \mathscr{S}^*$，则对任意 $\varphi \in \mathscr{S}$，$\langle f, \varphi^\wedge \rangle$ 确定了 $\mathscr{S}^*$ 上一个连续线性泛函，记为 $f^\wedge \in \mathscr{S}^*$，即

$$\langle f^\wedge, \varphi \rangle = \langle f, \varphi^\wedge \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.14}$$

称 $f^\wedge$ 为 f 的 Fourier 变式，记 $f \to f^\wedge$ 的映射为 F.

定理 4.12 映射 $F: f \to f^\wedge$ 是 $\mathscr{S}^*$ 到自身的拓扑同构.

证 因为 $F: \varphi \to \varphi^\wedge$ 是 $\mathscr{S}$ 到自身的拓扑同构，故作为 $\mathscr{S}$ 的对偶空间 $\mathscr{S}^*$ 上的映射 $F: f \to f^\wedge$ 是连续的. 现证

$$F^{-1}: \mathscr{S}^* \to \mathscr{S}^*$$

也是连续线性映射.

事实上，任给一个 $f \in \mathscr{S}^*$，由于 $F: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ 为拓扑同构，故对任意 $\varphi \in \mathscr{S}$，泛函 $\langle f, \varphi \rangle$ 的值也应由 $\varphi^\wedge$ 决定，并且也是 $\{\varphi^\wedge : \varphi \in \mathscr{S}\}$ 的连续线性泛函，记为

$$\langle g, \varphi^\wedge \rangle \equiv \langle f, \varphi \rangle;$$

但 $\{\varphi^\wedge : \varphi \in \mathscr{S}\} = \mathscr{S}$，因此 $\langle g, \varphi^\wedge \rangle$ 也成为 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函. 由 $g^\wedge$ 的定义，

$$\langle g^\wedge, \varphi \rangle = \langle g, \varphi^\wedge \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

故 $f = g^\wedge$. 这表明 F^{-1} 有意义，即 $g = F^{-1}(f)$，并且有

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle F^{-1}f, \varphi^\wedge \rangle.$$

由此知 F^{-1} 是 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函. 定理得证.

定理 4.13 设 $f\in\mathscr{S}^*$，则 $(D^\alpha f)^\wedge(\xi)=\xi^\alpha f^\wedge$.

证 先证 $(D_{x_j}f)^\wedge=\xi_j f^\wedge$. 注意到 $x_j\in\mathscr{O}_M^n$，故它是 $\mathscr{S}^*$ 乘子，$\xi_j f\in\mathscr{S}^*$. 易见，对 $\varphi\in\mathscr{S}$，利用定理 4.3，有

$$\begin{aligned}\langle D_{\xi_j}f^\wedge,\varphi\rangle&=-\langle f^\wedge,D_{x_j}\varphi\rangle\\&=-\langle f,(D_{x_j}\varphi)^\wedge\rangle=-\langle f,\xi_j\varphi^\wedge\rangle\\&=\langle-\xi_j f,\varphi^\wedge\rangle=\langle(-x_j f)^\wedge,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

因此 $(-x_j f)^\wedge=D_{\xi_j}f^\wedge$. 于是

$$(x^\alpha f)^\wedge=(-D)^\alpha f^\wedge, \tag{4.15}$$

故

$$\begin{aligned}\langle\xi_j f^\wedge,\varphi\rangle&=\langle f^\wedge,\xi_j\varphi\rangle=\langle f,(x_j\varphi)^\wedge\rangle\\&=\langle f,(-D_{\xi_j})\varphi^\wedge\rangle=\langle D_{x_j}f,\varphi^\wedge\rangle\\&=\langle(D_{x_j}f)^\wedge,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

因此 $(D_{x_j}f)^\wedge=\xi_j f^\wedge$. 一般地，得

$$(D^\alpha f)^\wedge=\xi^\alpha f^\wedge.$$

定理 4.14 反射与平移公式：

(1) $F(\tilde{f})=(2\pi)^n F^{-1}(f)$，　$\tilde{F}(f)=(2\pi)^n F^{-1}(f)$；

(2) $\tau_h F(f)=F(e^{i\langle x,h\rangle}f)$.

证明留作习题.

定理 4.15 对于 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{S}$，我们有 Parseval 等式

$$(f,g)=(2\pi)^{-n}(f^\wedge,g^\wedge), \tag{4.16}$$

其中 $(f,g)=\langle f,\bar{g}\rangle$ 称为 f 与 g 的 Hermite 配合. 因此(4.16)式就是

$$\langle f,\bar{g}\rangle=(2\pi)^{-n}\langle f^\wedge,\overline{g^\wedge}\rangle.$$

证 由于

$$\bar{g}=F(F^{-1}(\bar{g}))=\left[(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\bar{g}(\xi)d\xi\right]^\wedge,$$

令

$$h = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\overline{g}(\xi)d\xi,$$

上式又可写为 $\overline{g}=h^{\wedge}$，故

$$\langle f,\overline{g}\rangle = \langle f,h^{\wedge}\rangle = \langle f^{\wedge},h\rangle.$$

用 Hermite 配合表示上式，得$(f,g)=(f^{\wedge},\overline{h})$. 但因

$$\overline{h(x)} = (2\pi)^{-n}\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}g(\xi)d\xi = (2\pi)^{-n}g^{\wedge}(x),$$

从而

$$(f,g) = (f,\overline{h}) = (2\pi)^{-n}(f^{\wedge},g^{\wedge}).$$

这就是要证明的.

$\mathscr{S}^*$ 分布的卷积与 $D^*(\boldsymbol{R}^n)$分布有类似之处，也有不同之点，所以我们仍然从定义开始.

定义 4.4 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}^*$ 的定义如前.

(1) 设 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{S}$，定义 f 与 g 的卷积为

$$(f*g)(x) = \langle f,\overline{g}_x\rangle, \tag{4.17}$$

其中 $\overline{g}_x(y)=\widetilde{g}(y-x)=g(x-y)$，亦即 $\widetilde{g}_x=\tau_x\widetilde{g}$.

(2) 设 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{E}^*$，定义 f,g 的卷积为一个 $\mathscr{S}^*$ 分布，它满足

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f,\langle g,\varphi_{-x}\rangle\rangle, \quad \varphi\in\mathscr{S}. \tag{4.18}$$

以上定义的合理性及一些性质均建立在以下的定理上.

定理 4.16 当 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{S}$ 时，由(4.17)式定义的 $f*g$ 满足

(1) $f*g\in\mathscr{O}_M^n$;

(2) $f*g^{\wedge}=f^{\wedge}\circ g^{\wedge}$.

证 为证(1)，需要用到两个结论，我们叙而不证：

(a) $\mathscr{S}^*$ 分布的构造：对任意 $f\in\mathscr{S}^*$，必存在有界连续函数 $G\in C(\boldsymbol{R}^n)$及指标 $\alpha\in\boldsymbol{P}^n$，非负整数 $k\in\boldsymbol{P}$，使得

$$f = D^{\alpha}[(1+|x|^2)^{k/2}G(x)].$$

(b) Peetre 不等式：对任意 $t\in\boldsymbol{R}$ 及 $\xi,\eta\in\boldsymbol{R}^n$，我们有

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^t \leqslant 2^{|t|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|t|}.$$

于是，首先据 (a)，知 $f = \mathrm{D}^\alpha[(1+|x|^2)^{k/2}G(x)]$，$G \in C(\boldsymbol{R}^n)$，$\alpha \in \boldsymbol{P}^n$，$k \in \boldsymbol{P}$. 从而

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \langle f, \tilde{g}_x\rangle \\ &= \langle \mathrm{D}^\alpha[(1+|y|^2)^{k/2}G(y)], \tilde{g}_x\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle (1+|y|^2)^{k/2}G(y), \mathrm{D}_y^\alpha g(x-y)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int (1+|y|^2)^{k/2}G(y)\mathrm{D}_y^\alpha g(x-y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因 $g \in \mathscr{S}$，故上式有意义，且 $f*g \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 进而，由 Peetre 不等式得

$$(1+|y|^2)^t \leqslant 2^{|t|}(1+|x-y|^2)^{|t|}(1+|x|^2)^t,$$

代入前式得

$$(f*g)(x) = \int (1+|y|^2)^{-s}G(y)(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}+s} \cdot \partial_y^\alpha g(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $s>0$ 取得充分大，使 $(1+|y|^2)^{-s}G(y)$ 可积，且

$$\begin{aligned}&|\partial_x^\beta(f*g)(x)| \\ &= \left|\int (1+|y|^2)^{-s}G(y)(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}+s} \cdot \partial_{yx}^{\alpha+\beta}g(x-y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant C\int (1+|y|^2)^{-s}|G(y)|(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}+s} \cdot (1+|x-y|^2)^{\frac{k}{2}+s}|\partial_{yx}^{\alpha+\beta}g(x-y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant C\sup_x\left|(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}+s}\partial_{yx}^{\alpha+\beta}g(x)\right| \cdot (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}+s} \\ &= C_1(\beta)(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}+s}.\end{aligned}$$

于是 $f*g \in \mathscr{O}_M^n$.

现证(2). 因 $\mathscr{O}_M^n \subset \mathscr{S}^*$，故 $f*g \in \mathscr{S}^*$，并且有 $(f*g)^\wedge \in \mathscr{S}^*$. 任取 $h^\wedge \in D^\wedge(\boldsymbol{R}^n) \subset \mathscr{S}$，得知 $h \in \mathscr{S}$. 由定义

$$\langle (f*g)^\wedge, h\rangle = \langle f*g, h^\wedge\rangle$$

$$= \iint (1+|y|^2)^{-s} G(y)(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}+s} \cdot \partial_y^\alpha g(x-y) h^\wedge(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int (1+|y|^2)^{\frac{k}{2}} G(y)(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \langle g(x-y), h^\wedge(x)\rangle \mathrm{d}y$$

$$= \langle f, \langle g, (h^\wedge)_{-x}\rangle\rangle, \tag{4.19}$$

其中

$$\langle g, (h^\wedge)_{-x}\rangle = \int g(x)h^\wedge(x+y)\mathrm{d}x$$

$$= \int g(x-y)h^\wedge(x)\mathrm{d}x = (\tilde{g}*h^\wedge)(y). \tag{4.20}$$

又

$$\tilde{g}(x) = g(-x) = (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} g^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}(g^\wedge)^\wedge(x),$$

因此

$$(\tilde{g}*h^\wedge)(y) = (2\pi)^{-n}((g^\wedge)^\wedge * h^\wedge)(y)$$

$$= (g^\wedge h)^\wedge(y).$$

由于 $g, h\in\mathscr{S}$，上述最后一步由定理 4.7 得到. 这样，将其代入(4.19)和(4.20)式，有

$$\langle (f*g)^\wedge, h\rangle = \langle f, (g^\wedge h)^\wedge\rangle$$

$$= \langle f^\wedge, g^\wedge h\rangle = \langle f^\wedge g^\wedge, h\rangle. \tag{4.21}$$

因为 $h^\wedge\in D(\boldsymbol{R}^n)$在 $\mathscr{S}$ 稠密，故$\{h: h^\wedge\in D\}$在 $\mathscr{S}$ 中也稠密，所以(4.21)式给出

$$(f*g)^\wedge = f^\wedge g^\wedge.$$

定理得证.

对于 $f\in\mathscr{S}^*$，$g\in\mathscr{E}^*$ 的卷积，我们只叙述以下的结论而不给予证明，因为证明需要用到更多的预备知识.

定理 4.17 若 $g\in\mathscr{E}^*$，则

$$g^{\wedge}(\xi) = \langle g, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle,$$

且 $g \in \mathscr{O}_M^n$.

定理 4.18 若 $g \in \mathscr{E}^*$，则 $f * g \in \mathscr{S}^*$，且 $(f * g) = f^{\wedge} g^{\wedge}$ 成立.

最后给出 $\mathscr{S}^*$ 分布的 Fourier 变换的例子.

例 4.4 $\delta \in \mathscr{E}^*$，由定理 4.17，

$$\delta^{\wedge}(\xi) = \langle \delta, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle = e^{-i\langle x,\xi\rangle}\big|_{x=0} = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned}(\delta^{(\alpha)})^{\wedge}(\xi) &= \langle \delta^{(\alpha)}, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle = \langle \delta, (e^{-i\langle x,\xi\rangle})^{(\alpha)}\rangle \\ &= (e^{-i\langle x,\xi\rangle})^{(\alpha)}\big|_{x=0} = \xi^{\alpha}.\end{aligned}$$

例 4.5 $1 \in \mathscr{S}^*$，故对 $\varphi \in \mathscr{S}$，有

$$\begin{aligned}\langle 1^{\wedge}, \varphi\rangle = \langle 1, \varphi^{\wedge}\rangle &= \int \varphi^{\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^n (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle 0,\xi\rangle}\varphi^{\wedge}(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n \langle \delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

故 $1^{\wedge} = (2\pi)^n \delta$.

由于 δ 不是一个函数，而 1 却是经典意义下性质很好的函数，因此可以体会到用 Fourier 变换处理问题常会带来很多优越性，这种思想在近代数学中是屡见不鲜的.

例 4.6 $x^{\alpha} \in \mathscr{S}^*$，故由(4.13)式，

$$(x^{\alpha})^{\wedge} = (-D)^{\alpha} 1^{\wedge} = (2\pi)^n i^{\alpha} \delta^{\alpha}.$$

以上讨论只是给出 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}^*$ 上 Fourier 变换的最基本的性质，还可以研究 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}^*$ 中元的张量积及其 Fourier 变换、流形上分布及其 Fourier 变换等等. 我们不再一一介绍，可以参看参考书目[12]，[13]与[15].

§ 5 Wiener-Paley 定理

由定理 4.13 可以体会到，函数在无穷远处的衰减性质与其

Fourier 变式光滑性质有一定的联系，更确切地说，这是从经典的 Wiener-Paley 定理知道的. 而后为了更深入地讨论函数或分布的性质，人们推广了经典的 W-P 定理，得到 Wiener-Paley-Schwartz 定理.

如复变函数教程中所使用的定义那样，我们称在整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上解析的函数 $f(z)$ 为超越整函数.

先叙述经典的 W-P 定理.

定理 5.1 设 $f(z)$ 为 $\boldsymbol{C}$ 平面上的整函数，且它为指数型超越整函数，即：存在正常数 A 与 C，使

$$|f(z)| \leqslant C e^{A|z|}.$$

则 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的限制 $f(x)$ 为 $L^2(\boldsymbol{R})$ 函数，当且仅当存在 $\varphi(x) \in L^2(-A, A)$，使得

$$f(z) = C\int_{-A}^{A} \varphi(x) e^{ixz} dx.$$

在这个定理中，

$$f(z) = C\int_{-A}^{A} \varphi(x) e^{ixz} dx$$

实际上表示 $f(z)$ 是一个具紧支集的函数 φ 的某种 Fourier 变换，只是参数不是实数 ξ 而是复数 z 而已. 下面我们要给出严格定义，称它为 Fourier-Laplace 变换，而后将上述定理推广到一般情形，定理 5.1 的证明也可作为一般情形的特例而得到.

定义 5.1 n 维复数集 $\boldsymbol{C}^n$ 是指集合

$$\{(z_1, \cdots, z_n) : (z_1, \cdots, z_n) = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n),$$
$$z_j \in \boldsymbol{C}, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

其拓扑则取为积拓扑 $\boldsymbol{C} \times \cdots \times \boldsymbol{C}$.

例如，以 $z_0 \in \boldsymbol{C}^n$ 为心，r 为半径的开球为

$$B(z_0, r) = \{z \in \boldsymbol{C}^n : |z - z_0| \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j - (z_0)_j| < r\},$$

或其他等价范数.

定义 5.2 设 $\Omega \subset \boldsymbol{C}^n$ 为开子集. 称 $f : \Omega \to \boldsymbol{C}$ 为 Ω 上的解析函

数，若对每组固定的 $z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_n$，且 $\zeta\in\Omega(z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_n)$，函数

$$f(z_1,\cdots,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},\cdots,z_n)$$

都是 ζ 的解析函数，这里

$$\begin{aligned}&\Omega(z_1,\cdots,z_{j-1},z_1,\cdots,z_n)\\&\quad=\{\zeta\in \boldsymbol{C}:(z_1,\cdots,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},\cdots,z_n)\in\Omega\}.\end{aligned}$$

若 $\Omega=\boldsymbol{C}^n$，而 f 是 $\Omega=\boldsymbol{C}^n$ 上的解析函数，则称 f 为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数. 以下我们总考虑超越整函数，亦即 $f\neq$ 常数的超越整函数，并且简称为整函数.

定义 5.3 设 $f(x)$ 为定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数（实值或复值），如果积分

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，这里 $\zeta\in\boldsymbol{C}^n$，则称

$$f^{\wedge}(\zeta)=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}f(x)\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

为 f 的 Fourier-Laplace 变换. 记 $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$， $\xi,\eta\in\boldsymbol{R}^n$.

不难看出，f 的 Fourier-Laplace 变换就是函数 $\mathrm{e}^{\langle x,\eta\rangle}f(x)$ 的 Fourier 变换. 由于 $\mathrm{e}^{\langle x,\eta\rangle}$ 当 $|x|\to\infty$ 时是急增函数，因此，欲使(5.1)式的积分存在，必须对函数 f 加条件. 于是就引出当 $f\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)=D(\boldsymbol{R}^n)$ 时与 $f\in\mathscr{E}^*$ 时的 W-P 定理：

定理 5.2 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数 $f(\zeta)$ 是某个支集含于 $|x|\leqslant A$ 内的 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 函数 $g(x)$ 的 Fourier-Laplace 变换，当且仅当对任意 $N\in\boldsymbol{P}$，存在常数 C_N，使

$$|f(\zeta)|\leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N}\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\zeta|},\quad \zeta\in\boldsymbol{C}^n. \tag{5.2}$$

证 必要性. 设 $f(\zeta)$ 为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数，且存在 $g\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，满足

$$\mathrm{supp}(g)\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x|\leqslant A\},$$

并使下式成立

$$f(\zeta)=\int g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}\mathrm{d}x=\int_{|x|\leqslant A}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}\mathrm{d}x.$$

故

$$\zeta^{\alpha}f(\zeta)=\int_{|x|\leqslant A}\mathrm{D}^{\alpha}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

注意到 $g\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，则有 $|\mathrm{D}^{\alpha}g(x)|\leqslant C_{\alpha}$ 在 $\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x|\leqslant A\}$ 中成立. 此外，由

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\zeta,x\rangle}|&=|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\xi+\mathrm{i}\eta,x\rangle}|=|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\xi,x\rangle}|\cdot|\mathrm{e}^{\langle\eta,x\rangle}|\\&=\mathrm{e}^{\langle\eta,x\rangle}\leqslant\mathrm{e}^{|x||\mathrm{Im}\zeta|}\leqslant\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\zeta|}\end{aligned}$$

与 α 的任意性，以及(5.3)式，我们得到

$$(1+|\zeta|)^N|f(\xi)|\leqslant C_N\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\zeta|}.$$

从而，对任意 $N\in\boldsymbol{P}$，得

$$|f(\zeta)|\leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N}\mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\zeta|}.$$

必要性得证.

充分性. 设 $f(\xi)$ 为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数，且对任意 $N\in\boldsymbol{P}$，存在 C_N，使(5.2)式成立. 取 $\zeta=\xi$，(5.2)式化为

$$|f(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N},$$

此式对任意 $N\in\boldsymbol{P}$ 成立，说明 $f(\xi)$ 在无穷远处急降，即 $f(\xi)\in\mathscr{S}$. 于是存在 $g\in\mathscr{S}$，使得

$$g(x)=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}f(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{5.4}$$

还需证明 $\mathrm{supp}(g)\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x|\leqslant A\}$. 由于 $f(\xi)$ 为整函数，且满足(5.2)式，故(5.4)式右面的积分可考虑为复域 $\boldsymbol{C}^n$ 上的积分

$$\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\zeta\rangle}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

然后利用 Cauchy 积分公式，取积分路径 Γ 为 $\eta=0,\eta=$常数，$\xi=-M$ 与 $\xi=M$，只要 $M>0$ 充分大，便得

$$g(x)=(2\pi)^{-n}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\zeta\rangle}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

利用(5.2)式，取 $N=n+1$，并由

$$|e^{i\langle x,\zeta\rangle}| = e^{-\langle \eta,x\rangle} \quad 及 \quad 1+|\zeta| \geqslant 1+|\xi|,$$

有

$$|g(x)| \leqslant (2\pi)^{-n} C_N e^{A|\eta|-\langle \eta,x\rangle} \int (1+|\xi|)^{-n-1} d\xi$$
$$\leqslant C e^{A|\eta|-\langle \eta,x\rangle}.$$

再令 $\eta = tx$，上式化为

$$|g(x)| \leqslant C e^{-t(|x|^2 - A|x|)}.$$

易证，当 $|x|>A$ 时 $g(x)=0$. 故

$$\mathrm{supp}(g) \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant A\}.$$

显然，这个 $f(\zeta)$ 就是 $g(x)$ 的 Fourier-Laplace 变换. 定理得证.

现在介绍 Wiener-Paley-Schwartz 定理.

定理 5.3 若 $f(\zeta)$ 是 $g \in \mathscr{E}^*$ 的 Fourier-Laplace 变换，即

$$f(\zeta) = \langle g, e^{-i\langle \zeta,x\rangle}\rangle, \quad \zeta \in \boldsymbol{C}^n,$$

则 f 是满足下述条件的整函数：存在常数 $C>0$，$A>0$ 及 $N \in \boldsymbol{P}$，使得

$$|f(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{A|\mathrm{Im}\zeta|}, \quad \zeta \in \boldsymbol{C}^n. \tag{5.5}$$

反之，若 $f(\zeta)$ 是满足条件(5.5)的整函数，则 $f(\zeta)$ 为某个 $\mathscr{E}^*$ 分布 g 的 Fourier-Laplace 变换.

证 首先说明，当 $g \in \mathscr{E}^*$ 时，由定理 4.17 知，

$$g^\wedge(\xi) = \langle g, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle$$

为 $\mathscr{O}_M^n$ 中的元，故 $\langle g, e^{-i\langle \zeta,x\rangle}\rangle$ 也视为 $g^\wedge(\xi)$ 在 $\boldsymbol{C}^n$ 上的解析开拓，并且这个开拓是 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数，记为

$$h(\zeta) = \langle g, e^{-i\langle \zeta,x\rangle}\rangle,$$

它也就是 g 的 Fourier-Laplace 变换. 因此，为证明必要性，只需证 $f(\zeta)=h(\zeta)$ 满足(5.5)式.

这里要用到 $\mathscr{E}^*$ 分布的构造定理：$g \in \mathscr{E}^*$ 可以表示为一个具紧支集 K 的连续函数 $G(x)$ 的有限阶导数 $g = D^\alpha G$，K 含在 $\mathrm{supp}(g)$ 的任一邻域中. 亦即，若

$$\mathrm{supp}(g) \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant A\},$$

则

$$K \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant A + \varepsilon\},$$

$\varepsilon>0$ 为任意小的正数.

对任意 $\zeta\in \boldsymbol{C}^n$, $e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$关于 x 成立，故

$$\begin{aligned}
|\langle g, e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\rangle| &= |\langle D^\alpha G, e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\rangle| = |\langle g, D_x^\alpha e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\rangle| \\
&\leqslant \int_{|x|\leqslant A+\varepsilon} |G(x)\cdot D_x^\alpha e^{-i\langle\zeta,x\rangle}|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C \sup_{|x|\leqslant A+\varepsilon} |D_x^\alpha e^{-i\langle\zeta,x\rangle}| \\
&= C|\zeta|^\alpha e^{\langle\mathrm{Im}\zeta,x\rangle}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

取 $N=|\alpha|$，由

$$f(\zeta) = h(\zeta) = \langle g, e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\rangle,$$

并且

$$e^{\langle\mathrm{Im}\zeta,x\rangle} \leqslant e^{(A+\varepsilon)|\mathrm{Im}\zeta|},$$

据(5.6)式便得(5.5)式. 必要性得证.

为证充分性，设 $f(\zeta)$为满足(5.5)式的整函数. 令 $\zeta=\xi$，由(5.5)式知

$$|f(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^N,$$

故 $f\in\mathscr{O}_M^n$. 于是 $f\in\mathscr{S}^*$. 但是 Fourier 变换 $F:\mathscr{S}^*\to\mathscr{S}^*$ 是同构映射，我们断定，存在 $g\in\mathscr{S}^*$，使 $f=g^\wedge$.

以下证 supp(g)为紧集，且含于$\{x\in\boldsymbol{R}^n : |x|\leqslant A\}$. 设

$$j_a(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{a^2}{(|x|^2-a^2)}\right\}, & |x|<a, \\ 0, & |x|\geqslant a, \end{cases}$$

并且设

$$J_a = \frac{1}{c_a} j_a, \quad c_a = \int j_a(x)\mathrm{d}x.$$

取 $\alpha_k\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$为 $\alpha_k=J_{\frac{1}{k}}$，作卷积

$$(g*\alpha_k)(x), \quad k=1,2,3,\cdots.$$

显然，$g*\alpha_k\to g$ 在 $D^*(\Omega)$中成立. 另一方面，

$$(g * \alpha_k)^\wedge = g^\wedge \cdot \alpha_k^\wedge.$$

对于上面等式右边的两个因子，由于第一个因子 $g \in \mathscr{S}^*$ 是实变量 $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ 的函数

$$g^\wedge(\xi) = \langle g, \mathrm{e}^{-i\langle \cdot, \xi \rangle} \rangle,$$

故可解析开拓到 $\boldsymbol{C}^n$ 上成为满足(5.5)式的整函数. 对第二个因子 $\alpha_k^\wedge$，由于 α_k 的支集在 $|x| \leqslant 1/k$ 内，据定理 5.2，知 $\alpha_k^\wedge(x)$ 也可解析开拓到 $\boldsymbol{C}^n$ 上成为 $\alpha_k^\wedge(\zeta)$，并且对任意整数 M，满足

$$|\alpha_k^\wedge(\zeta)| \leqslant C_M \mathrm{e}^{\frac{1}{k}|\mathrm{Im}\zeta|}(1 + |\zeta|)^{-M}.$$

结合起来，$g^\wedge \cdot \alpha_k^\wedge$ 可以解析开拓到 $\boldsymbol{C}^n$ 上，成为整函数，亦即，对 $(g * \alpha_k)^\wedge$ 可解析开拓为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数，且对任意 $M > 0$，下式成立：

$$|(g * \alpha_k)^\wedge(\zeta)| \leqslant C\mathrm{e}^{\left(A + \frac{1}{k}\right)|\mathrm{Im}\zeta|}(1 + |\zeta|)^{N-M},$$

其中 N 是 g 满足(5.5)式时的固定的 N，故$(N-M)$仍为任意整数. 再用一次定理 5.2 的充分性部分，知$(f * \alpha_k)(x)$是具紧支集的 C^∞ 函数，其支集含于$|x| \leqslant A + \dfrac{1}{k}$内. 最后，令 $k \to \infty$，其极限 $g(x)$ 作为 $\mathscr{S}^*$ 分布，支集也必含于$|x| \leqslant A$ 内，这样，$g \in \mathscr{E}^*$，且 $\mathrm{supp}(g) \subset B$. 定理得证.

在偏微分方程、调和分析，以及其他分析领域中，W-P 定理及 W-P-S 定理都有很多应用. 作为例子，我们证明常系数偏微分方程基本解的存在性.

记 $C_0^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)$的对偶空间为 $\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)'$，赋此对偶空间关于 Banach 空间的序列$\{C^{n+1}(K)\}_{k \in \mathscr{K}}$的归纳极限拓扑.

注　这里 $\mathscr{K}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧集的全体所生成的集，$C_0^{n+1}(K)$是支集在紧集 $K \in \mathscr{K}$ 中并且具有 $n+1$ 阶连续导数的空间，其范数为

$$\| f \|_K^{n+1} = \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant n+1} |\mathrm{D}^\alpha f|.$$

据归纳极限拓扑的定义可知，在这样的拓扑之下，函数序列$\{\varphi_j\} \subset$

$C_0^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)$趋于零是指：存在 $J_0\in N$，使当 $j\geqslant J_0$ 时，

$$\operatorname{supp}\varphi_j\subset K,$$

并且

$$\|\varphi_j\|_K^{n+1}\to 0.$$

显然有连续嵌入关系 $\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)'\hookrightarrow\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)'$.

现在我们在分布空间 $\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)'$中证明常系数偏微分方程的基本解的存在性. 所采用的证明方法是一个典型的利用对偶性解决存在问题的例子.

先给出两个事实(用 Cauchy 积分公式可以证明)：

(1) 设 $f(z)$在闭单位圆$|z|\leqslant 1$ 中解析，

$$P(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

是 m 次多项式，$a_m\neq 0$. 则有

$$|a_m f(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta. \tag{5.7}$$

(2) 设 $f(z)$为整函数，$P(z)$同(1)，则

$$|a_m f(z_0)|\leqslant\sup_{|z-z_0|\leqslant 1}|f(z)P(z)|. \tag{5.8}$$

定理 5.4(Malgrange 定理) $\boldsymbol{R}^n$ 上的常系数偏微分方程

$$P(D)u=\delta \tag{5.9}$$

必存在基本解 $E\in\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)'$.

证 设微分算子 P 的转置算子为 P^{T}. 由于

$$\langle \mathrm{P}T,\varphi\rangle=\langle T,\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi\rangle,$$

$$T\in\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)',\quad \varphi\in\mathscr{D}^{n+1}(\boldsymbol{R}^n),$$

设 E 为基本解，若令 $T=E$，则由于 $\mathrm{P}T=\mathrm{P}E=\delta$，便有

$$\varphi(0)=\langle E,\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi\rangle. \tag{5.10}$$

为此，我们只要证明 $\varphi(0)$是 $\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi$ 的连续线性泛函.

记 $\zeta=(\zeta',\tau)\in\boldsymbol{C}^n$，$\zeta'=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})\in\boldsymbol{C}^{n-1}$，$\tau\in\boldsymbol{C}$，且

$$\zeta_j=\xi_j+\mathrm{i}\eta_j,\quad j=1,2,\cdots,n-1;\quad \tau=\mu+\mathrm{i}v.$$

又设 $\varphi^\wedge(\zeta)$ 是 φ 的 Fourier-Laplace 变换. 据 W-P 定理，$\varphi^\wedge(\zeta)$ 是 ζ

的整函数，并且$\varphi^{\wedge}(\xi_n)$是速降的. 由 Fourier 逆变换公式：

$$|\varphi(0)| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int |\varphi^{\wedge}(\xi', \mu)| \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant A \int (1 + |\xi_1|^{n+1} + \cdots + |\xi_{n-1}|^{n+1}$$

$$+ |\mu|^{n+1})^{-1} \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\mu, \tag{5.11}$$

其中

$$A = \sup_{(\xi', \mu)} |\varphi^{\wedge}(\xi', \mu)| (1 + |\xi_1|^{n+1} + \cdots$$

$$+ |\xi_{n-1}|^{n+1} + |\mu|^{n+1}). \tag{5.12}$$

现在我们来估计(5.12)式中的 A. 事实上，如果视 ξ' 为参数，则 $\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)$，$\xi_j^{n+1}\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)$ 与 $\tau^{n+1}\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)$ 都是 τ 的整函数. 因此由(5.8)式可得

$$|\varphi^{\wedge}(\xi', \mu)| \leqslant \sup_{|\tau-\mu| \leqslant 1} |\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)|,$$

$$|\xi_j^{n+1}\varphi^{\wedge}(\xi', \mu)| \leqslant \sup_{|\tau-\mu| \leqslant 1} |\xi_j^{n+1}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)|,$$

$$|\mu^{n+1}\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)| \leqslant \sup_{|\tau-\mu| \leqslant 1} |\tau^{n+1}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)|.$$

进而，由

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau) = \int_{R^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\langle x', \xi' \rangle + t\tau)} \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(D)\varphi(x', t) \mathrm{d}x' \mathrm{d}t.$$

注意到 $\tau = \mu + \mathrm{i}\nu$，从而有

$$|\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)| \leqslant \int_{R^n} \mathrm{e}^{\nu t} |\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(D)\varphi(x', t)| \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,$$

$$|\xi_j^{n+1}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)| \leqslant \int_{R^n} \mathrm{e}^{\nu t} |D_j^{n+1} \circ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(D)\varphi(x', t)| \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,$$

$$|\tau^{n+1}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(\xi', \tau)\varphi^{\wedge}(\xi', \tau)| \leqslant \int_{R^n} \mathrm{e}^{\nu t} |D_t^{n+1} \circ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}(D)\varphi(x', t)| \mathrm{d}x' \mathrm{d}t.$$

因为 $\tau - \mu = \mathrm{i}\nu$，上面三式中的 ν 满足 $|\nu| \leqslant 1$，于是

$$A \leqslant \sup_{|\nu| \leqslant 1} \int_{R^n} \mathrm{e}^{\nu t} \left\{ |\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi| + \left[\sum_j |D_j^{n+1} \circ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi| \right] \right.$$

$$\left. + |D_t^{n+1} \circ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\varphi| \right\} \mathrm{d}x' \mathrm{d}t.$$

令 $P^T\varphi=\psi$，则若取 $\psi_k\to0$（在 $C_0^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)$ 中），便有 $A\to0$. 从而(5.10)式所确定的 $P^T\varphi$ 成为 $P^T\mathscr{D}$ 上的连续线性泛函，这里 $P^T\mathscr{D}$ 的拓扑是 $C_0^{n+1}(\boldsymbol{R}^n)$ 的对偶拓扑. 定理得证.

其他应用的例子，可见参考书目[11]，[12]，[14]等.

习　题

1. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，E 是 X 的线性子空间，则 E 关于子空间拓扑成为 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，且 $\overline{E}$ 也是 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间. 试证明之.

2. 设 $\{X_l\}_{l\in I}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的一族拓扑线性空间. 试证：积集 $X=\prod\limits_{l\in I}X_l$ 在积线性空间结构与积拓扑结构之下形成一个拓扑线性空间，称为积拓扑线性空间.

3. 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，E 是 X 的线性子空间，试证：商集 X/E 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 进而，在商拓扑之下，X/E 为 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，试证明之.

4. 设$(X,\|\cdot\|)$为 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间，M 为 X 的闭线性子空间. 对于 X 关于 M 的商集 X/M，定义其中的元 $u=x+m$，$x\in X$，定义

$$\|u\| =\inf\{\|y\|_x : y\in u\}.$$

试证：

(1) $u\to\|u\|$ 是 X/M 上的范数；

(2) 范数拓扑与商拓扑一致.

5. 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的 T_2 型拓扑线性空间，S 是 X 的紧子集，试证：S 的均衡包是紧的，且与 S 的闭均衡包相等.

6. 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$A\subset X$ 为 X 的均衡子集. 试证下列论断等价：

(1) A 是吸收的；

(2) 对每个 $x\in X$，存在 $\lambda\in\mathbb{K}$，$\lambda\neq0$，使 $\lambda x\in A$.

7. 设 A 为均衡集，试证：$\overline{\lambda A}=\lambda\overline{A}$，$\lambda\in\mathbf{K}$.

8. 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的 T_2 型一维拓扑线性空间. 试证：对任一元 $a\in X$，$A\neq 0$，$\mathbf{K}$ 到 X 的映射 $f:\lambda\to\lambda\alpha$ 是一个同胚映射.

9. 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，M 是 X 的线性子空间. 称 M 为极大线性子空间，若 $M\subset X$，$M\neq X$，且若 N 是包含 M 的线性子空间，则 $N=Z$ 或 $N=M$. 试证下述论断等价：

(1) M 是 X 的极大线性子空间；

(2) 对任何 $x\in X-M$，有 $M+\mathbf{K}x=X$，这里

$$\mathbf{K}x=\{z\in X:z=\lambda x,\lambda\in\mathbf{K}\}$$

为 X 的一维子空间；

(3) M 是 X 上某个非零线性式 f 的核，即

$$M=\{x\in X:f(x)=0\},$$

亦即

$$M=f^{-1}(\{0\}).$$

10. 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的 T_2 型拓扑线性空间，M 为 X 的线性子空间. 试证下述三论断等价：

(1) M 是 X 上的闭极大线性子空间；

(2) M 是 X 上某个非零连续线性式 f 的核；

(3) M 是 X 的闭线性子空间，且 X/M 是一维的.

11. 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的 n 维 T_2 型拓扑线性空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 X 的基底. 又设映射 $u:\mathbf{K}^n\to X$ 为线性空间之间的代数同构映射. 试证：u 在 X 的拓扑之下是同胚映射.

12. 试证：$\mathbf{K}$ 上的 T_2 型拓扑线性空间的 Riesz 定理：X 为局部紧的，当且仅当 X 为有限维的.

13. 试证定理 1.6 的(1)～(3).

14. 设 X 为 $\mathbf{K}$ 上的拓扑线性空间，A 是 X 的凸子集，且 $A\neq\varnothing$. 试证：若 $a\in\mathring{A}$，$D\in\overline{A}$，则以 a，b 为端点的线段 S_{ab}，其上除 b 点以外都是 A 的内点；从而证明 A 也是凸集；进而，证明

$$\overline{A}=\overline{\mathring{A}} \quad 与 \quad \mathring{\overline{A}}=\mathring{A}.$$

15. 试证定理 1.7，定理 1.11 与定理 1.12.

16. 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，p 与 q 为 X 上的半范数，且对 $x\in X$ 有 $p(x)\leqslant q(x)$. 试证：$\tau_p\subset\tau_q$.

17. 设 X，Y 为 $\mathbb{K}$ 上的 T_2 型局部凸空间，若 $X\subset Y$，试证：$X^*\supset Y^*$.

18. 设$(X_l)_{l\in I}$为 $\mathbb{K}$ 上的局部凸空间簇，X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 若 $f_l: X_l\to X(l\in I)$ 为线性映射.

(1) 设 τ 为 X 的拓扑. 若 $\mathscr{B}$ 为 X 的所有凸、吸收集所生成的集族，使 $f^{-1}(V)$为 X_l 中零元 θ_l 的邻域，这里 $l\in I, V\in\mathscr{B}$. 试证：$\mathscr{B}$ 是 X 的零元 $\theta\in X$ 的邻域滤系基，此基所形成的 X 上的拓扑τ'是 τ 的协调拓扑.

(2) τ'是使每个 f_l 连续的 X 上的最精局部凸拓扑.

19. 设 X 与 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，F 是 X 与 Y 的对偶映射，若 $Y_0\subset Y$ 是 Y 的线性子空间，且对 $x\in X$，关系式 $F(x,y)=0$ 对每个 $y\in Y_0$ 成立，蕴涵 $x=\theta$. 又假设 $Y_0\neq Y$，则

$$\tau(X,Y_0)\subsetneqq\tau(X,Y),$$

试证明之.

20. 设 X 与 Y 为 $\mathbb{K}$ 上的拓扑线性空间，$u: X\to Y$ 是线性映射，若 Y 为有限维的，试证 u 为连续映射.

21. 设 X 为 $\boldsymbol{C}$ 上的局部凸空间，$A\subset X$ 为 X 的非空闭凸集. 若 $b\notin A$. 试证：存在 X 上的非零连续线性式 f 与一实数 β，$\mathrm{Re}f<\beta$ 在 A 上成立，而且 $\mathrm{Re}f(b)>\beta$.

22. 对于 $D(\boldsymbol{R}^n)$中的元 $j_a(x)$，试证：相应的

$$f_a(x)=\frac{1}{c_a}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)j_a(x-y)\mathrm{d}y\right\}$$

的支集有关系式

$$\mathrm{supp}(f_a)\supset K_a=\{x\in\boldsymbol{R}^n: \mathrm{d}(x,k)\leqslant\varepsilon\},$$

其中 $K=\mathrm{supp}(f)$.

23. 试证：$C_0^\infty(\Omega)$在 $C^m(\Omega)$中稠密，$m\in \boldsymbol{P}$.

24. 试证：$D^*(\Omega)$分布为无穷次可导的，且结果与求导次序无关.

25. 试证定理 3.7.

26. 试证：若$\{V_l\}_{l\in I}\subset\Omega$为$\Omega$中的一族开子集. 又设$f\in D^*(\Omega)$在每个 V_l 上为 0. 试证：f 在并集 $\bigcup\limits_{l\in I} V_l$ 上为 0.

27. 设 $g(x)=e^{-\mathrm{i}|x|^2/2}(|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2)$为 Causs 函数. 试证：对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$[g(\varepsilon x)]^\wedge(\xi)=\varepsilon^{-n}\varphi^\wedge(\varepsilon^{-1}\xi),\quad \xi\in \boldsymbol{R}^n.$$

28. 试 证：$\mathscr{S}\hookrightarrow\mathscr{O}_M^n\hookrightarrow\mathscr{S}^*$，且$\mathscr{S}$在$\mathscr{O}_M^n$中稠密.

29. 试证定理 4.14.

30. 由于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)\subset\mathscr{S}^*$，故 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$的 Fourier 变式定义为

$$\langle f^\wedge,\varphi\rangle=\langle f,\varphi^\wedge\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{S}.$$

试求出$\langle f^\wedge,\varphi\rangle$的具体表示式.

31. 若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，试证：$f^\wedge$连续，且 $\lim\limits_{|\xi|\to 0}f^\wedge(\xi)=0$.

32. 若 $f,f^\wedge\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，试证：有反演公式

$$f(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{\mathrm{i}(x,\xi)}f^\wedge(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

33. 若 $f(x)$与 $x^\alpha f(x)(|\alpha|\leqslant m)$都属于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$. 试证：$\mathrm{D}^\alpha f^\wedge$存在，且

$$(x^\alpha f(x))^\wedge=(-\mathrm{D})^\alpha f^\wedge;$$

又若 f 与 $\mathrm{D}^\alpha f$ 属于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$|\alpha|\leqslant m$，试证：

$$(\mathrm{D}^\alpha f)^\wedge(\xi)=\xi^\alpha f^\wedge(\xi).$$

34. 对 $f,g\in L^1$，试证：$f*g\in L^1$，且

$$(f*g)^\wedge=f^\wedge g^\wedge.$$

35. 由于 $L^2(\boldsymbol{R}^n)\subset\mathscr{S}^*$，故 L^2 函数的 Fourier 变式也是一个$\mathscr{S}^*$分布，试证：

$$f^{\wedge}(\xi) = \lim_{N\to\infty}\int_{|x|\leqslant N} e^{-i(x,\xi)} f(x)\mathrm{d}x;$$

且 $F: L^2 \to L^2$ 是一个等距：$\|f\|_2 = \|f^{\wedge}\|_2$.

36. 若 $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，试证：Plancherel 公式

$$(f, g) = (f^{\wedge}, g^{\wedge}).$$

附　录

本附录中，§1 给出 Banach 空间中的几个重要定理，它们包括 Baire 类型定理、开映射定理、逆映射定理、闭图定理、共鸣定理、Hahn-Banach 扩张定理和 Riesz 定理等，并简单地阐述 Banach 空间的几何理论. §2 是点集拓扑的基本知识，内容有拓扑空间的拓扑结构、拓扑空间的连续映射、格网、子空间、积空间、商空间的拓扑结构、分离性、紧性、局部紧性和列紧性等；三个重要定理：Urysohn 引理，Tietze 扩张定理，Тихонов 定理；可分性与连通性. §3 叙述多重线性映射、连续映射空间及他们的重要性质，Banach 代数，Stone-Weierstrass 定理，Arzela-Ascoli 定理与应用.

§1　Banach 空间中的几个重要定理

Banach 空间是一个具有代数结构（线性空间结构）与拓扑结构（范数）的完备的赋范线性空间. 在泛函分析课程中，读者已经熟悉这种空间的很多性质. 作为本教材的预备知识，也便于读者复习与参考，我们在此附录中给出其中某些重要定理.

定义 1.1　设 X 为一非空集，**K** 为数域（$\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{R}$）. 若下列条件满足：

（1）X 关于"加法"是一个可换加群（Abel 群）. 亦即，对任意一对元 $x,y\in X$，定义一种运算，称为加法，记为 $x+y$，满足

（a）运算封闭性：$x,y\in X$ 蕴涵 $x+y\in X$；

（b）结合律：$(x+y)+z=x+(y+z)$；

（c）交换律：$x+y=y+x$；

（d）零元存在性：存在一个元 $\theta\in X$，称为零元，使对每个 x

$\in X$，有 $x+\theta=x$；

(e) 逆元存在性：对每个 $x\in X$，存在一个元 $-x\in X$，称为逆元，满足 $x+(-x)=\theta$.

(2) X 中的元与 $\mathbb{K}$ 中的元之间存在运算，称为“数乘”，它满足加乘分配律. 亦即，对任一对元 $x\in X$ 与 $\alpha\in\mathbb{K}$，定义一种运算，称为数乘，记为 αx，满足

(a) 运算封闭性：$x\in X,\alpha\in\boldsymbol{R}\ \Rightarrow \alpha x\in X$；

(b) 结合律：$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$，$1x=x$；

(c) 加乘分配律：

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$$

则称 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，简称线性空间. 若 $\mathbb{K}=\boldsymbol{R}$，则称 X 为实线性空间，若 $\mathbb{K}=\boldsymbol{C}$，则称 X 为复线性空间.

定义 1.2 设 X 为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，若 X 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的映射 $\|\cdot\|: x\to\|\ \|$ 满足

(1) 非负性：$\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0\ \Leftrightarrow x=0$；

(2) 绝对齐性：$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，$\alpha\in\mathbb{K},x\in X$；

(3) 三角不等式：

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\quad x,y\in X,$$

则称 X 为赋范线性空间，$\|x\|$ 称为 X 的元 x 的范数. 由此范数可确定 X 上的拓扑.

赋范线性空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Cauchy 序列，若 $m,n\to\infty$ 时，下式成立：

$$\|x_n-x_m\|\to 0.$$

若 X 中的每个 Cauchy 序列都收敛于 X 中的一个相应元 x，亦即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

则称 X 为完备赋范线性空间或 Banach 空间.

同一个线性空间 X 可以赋予不同的范数，因而可确定 X 上不同的拓扑. 这就产生两个拓扑的比较问题(拓扑的精粗比较的一般

定义见§2中定义 2.4).

定义 1.3 设$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$为线性空间 X 上的两个范数. 我们称$\|\cdot\|_1$比$\|\cdot\|_2$精(也就是,由$\|\cdot\|_1$确定的 X 上的拓扑比由$\|\cdot\|_2$确定的拓扑精,以下同),若存在常数 $C>0$,使

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$$

对每个 $x\in X$ 成立. 此时也称$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$粗.

又我们称$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$彼此等价,若$\|\cdot\|_1$比$\|\cdot\|_2$精,同时$\|\cdot\|_2$也比$\|\cdot\|_1$精. 也就是,存在常数 $C_1>0$ 与 $C_2>0$,使

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$$

对每个 $x\in X$ 成立.

1.1 Baire 类型定理

我们先介绍 Baire 类型定理,然后叙述开映射定理、逆映射定理、闭图定理,以及共鸣定理. 后面所说的几个定理均可利用 Baire 类型定理进行证明.

定理 1.1(Baire 定理) 设 X 为 Banach 空间,则

(1) 若$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中开的稠密子集列,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 在 X 中稠密;

(2) X 不是可数多个无处稠密集之并.

证 (1) 我们只需证明,对于 X 的任一开集 $W\neq\varnothing$,有

$$W\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)\neq\varnothing.$$

由于$\overline{U}_1=X$,故开集 $W\cap U_1\neq\varnothing$,从而存在以 $r_1(0<r_1<1)$为半径,以 $x_1(\in W\cap U_1)$为中心的开球

$$B(x_1,r_1)=\{x\in X: \|x-x_1\|<r_1\},$$

使

$$\overline{B(x_1,r_1)}\subset W\cap U_1.$$

归纳地,若 $n\geqslant 2$ 时,x_{n-1}与 $r_{n-1}(0<r_{n-1}<1/2^{n-1})$都已选定,则

$\overline{U}_n = X$表明

$$U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \varnothing,$$

这里

$$B(x_{n-1}, r_{n-1}) = \{x \in X : \| x - x_{n-1} \| < r_{n-1}\} \\ \subset W \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

于是存在以 r_n 为半径，$0<r_n<1/2^n$，以 $x_n \in W \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ 为中心的开球 $B(x_n, r_n)$，满足

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}).$$

如此继续下去，得到 X 中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使当 n, m 大于某个 $N>0$ 时，有 $x_n, x_m \in B(x_N, r_N)$. 故$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中的 Cauchy 序列. 于是存在 $x \in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

但因当 $n>N$ 时，

$$x \in \overline{B(x_n, r_n)},$$

所以，$x \in U_n, n=1,2,\cdots$，从而 $x \in W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$.

(2) 设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中任一无处稠密集列，由定义

$$\overline{\mathscr{C}\overline{E}_n} = X,$$

故$\{\mathscr{C}\overline{E}_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中的开稠密子集列. 据(1)，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}\overline{E}_n \neq \varnothing$，于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \mathscr{C}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}\overline{E}_n \right) \subsetneq X$$

给出(2). 定理得证.

Baire 定理对完备的距离空间也成立. 用此定理可以把空间分作两类. 若完备距离空间 X 能表示为可列多个无处稠密子集的并集

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

这里$\overline{\mathscr{C}E_n}=X$，则称 X 为第一类型空间. 非第一类型空间称为第二类型空间(有时也分别称它们为第一纲集或第二纲集).

由 Baire 定理可以证明如下定理.

定理 1.2(开映射定理) 设 X,Y 为 Banach 空间，T 为 X 到 Y 上的连续线性映射，即 T 为连续线性满射，$f(X)=Y$. 则 T 是开映射，也就是对 X 中的任何开集 U，其像集 $f(U)$是 Y 中的开集.

由开映射定理可以证得：

定理 1.3(逆映射定理) 设 X,Y 为 Banach 空间，若 X 到 Y 上的连续线性映射 T 为一一映射，则 $T^{-1}:Y\to X$ 也是连续线性映射.

再由逆映射定理可以证明闭图定理.

定义 1.4 设 X,Y 为赋范线性空间，$T:X\to Y$ 为线性映射，积空间 $X\times Y$ 中的集

$$\Gamma(T)=\{(x,y)\in X\times Y : y=Tx\}$$

称为映射 T 的图. 若 $\Gamma(T)$为 $X\times Y$ 中的闭集，则称 T 为闭映射.

定理 1.4(闭图定理) 设 X,Y 为 Banach 空间. 若 $T:X\to Y$ 为闭映射，则 T 为连续映射.

从 Barie 定理可以直接证明共鸣定理(或称一致有界原理).

定理 1.5(共鸣定理) 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，

$$\mathscr{A}=\{T:X\to Y\}$$

为 X 到 Y 的某个连续线性映射集. 若

$$\sup_{T\in\mathscr{A}}\|Tx\|<+\infty$$

对每个 $x\in X$ 成立，则

$$\sup_{T\in\mathscr{A}}\|T\|<+\infty.$$

以 Baire 定理为基础证明上述几个定理的工作留给读者.

1.2 Hahn-Banach 定理

定理 1.6(Hahn-Banach 扩张定理) 设 X 为赋范线性空间，

$M\subset X$ 为 X 的线性子空间. 若 $f: M\to \boldsymbol{R}$ 为 M 上的连续线性泛函. 则 f 可以保持范数地扩张到 X 上，亦即存在 $g: X\to\boldsymbol{R}$ 为 X 上的连续线性泛函，使 $g|_M=f$，且 $\|g\|=\|f\|$.

在这里不去证明此定理了，只指出它的证明要用到 Zorn 引理.

若 X 仅为一个复的（或实的）线性空间，则有如下形式的 Hahn-Banach 定理.

定理 1.7 设 X 为复线性空间，p 为 X 满足下列性质的非负泛函：

（1）次可加性：$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，

（2）绝对齐性：$p(\lambda x)=\lambda p(x)$，$\lambda\in\boldsymbol{C}$.

又设 M 为 X 的线性子空间，$f: X\to\boldsymbol{C}$ 为 X 到 $\boldsymbol{C}$ 的线性泛函. 若

$$|f(x)|\leqslant p(x)$$

对 $x\in M$ 成立，则存在 X 上的连续线性泛函 $g: X\to\boldsymbol{C}$，满足 $g|_M=f$，且 $|g(x)|\leqslant p(x)$ 对 $x\in X$ 成立.

现在回到赋范线性空间，作为定理 1.6 的重要推论，我们有

定理 1.8 设 X 为赋范线性空间，M 为 X 的线性子空间，$x_0\in X$. 我们有：$x_0\in\overline{M}$，当且仅当存在 X 上的连续线性泛函 f，使对所有 $x\in M$，有 $f(x)=0$，且 $f(x_0)\neq 0$.

定理 1.9 设 X 为赋范线性空间，且 $x_0\in X$，$x_0\neq\theta$，则存在 X 上的连续线性泛函 f，使

$$f(x_0)=\|x_0\|,$$

且 $\|f\|=1$.

由此可知 X 上存在足够多的连续泛函.

1.3 Riesz 定理

Riesz 定理给出有限维赋范线性空间的刻画.

定义 1.5 设 X 为赋范线性空间. X 中的元列 $e_1,e_2,\cdots$ 称为 X 的 Schauder 基，简称基，若对每个 $x\in X$，存在唯一的数列 ξ_1，

$\xi_2,\cdots(\xi_j\in\mathbf{K})$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\left\|x-\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j\right\|=0.$$

我们称集$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的势为 X 的维数. 若维数$<\aleph_0$，便称 X 为有限维空间，否则称 X 为(可数)无限维空间.

定义 1.6 设 X 为线性空间，$X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的线性子空间. 若每个 $x\in X$ 可唯一地表示为 X_j 中的元素之和：

$$x=\sum_{j=1}^{n}p_j(x),$$

这里 $p_j(x)\in X_j$，$j=1,\cdots,n$，且 $p_j:X\to X_j$ 为线性映射，则称 X 为子空间 $X_1,\cdots,X_n$ 的代数直和，记为

$$X=X_1\dot{+}\cdots\dot{+}X_n. \tag{1.1}$$

又若 X 为赋范线性空间，$X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的赋范线性子空间，且(1.1)式成立，如果

$$(x_1,\cdots,x_n)\to x_1+\cdots+x_n$$

为 $X_1\times\cdots\times X_n$ 到 X 的同胚映射，则称 X 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的拓扑直和，记为

$$X=X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n.$$

定义 1.7 设 X 为实线性空间，$f:X\to\boldsymbol{R}$ 为 X 上的线性泛函，以后简称它为线性式. 我们称集合

$$H=f^{-1}(0)=\{x\in X:f(x)=0\}$$

为线性式 f 的核. 对于 X 的任一线性子空间 M，若对任意 $a\in X$，$a\notin M$，有

$$X=M\dot{+}Ra,$$

这里 $Ra=\{\xi a\in X:\xi\in\boldsymbol{R}\}$，则称 M 为 X 的超平面.

定理 1.10 设 X 为实线性空间，H 为线性式 $f:X\to\boldsymbol{R}$ 的核. 则 H 是 X 的超平面. 反之，若 H 是 X 的超平面，则必存在 X 上的线性式 f，使得 H 为 f 的核.

定理 1.11 设 X 为实赋范线性空间，H 为 X 的超平面，f 是

由定理 1.10 中所述的 H 对应的线性式，$H=f^{-1}(0)$. 则 H 在 X 中为闭的，当且仅当 f 为连续的，因而 X 是 H 与一个一维子空间 Ra 的拓扑直和.

利用定理 1.10 与定理 1.11，可以证明下面定理.

定理 1.12 设 X 为赋范线性空间，V 为 X 的闭子空间，W 为 X 的有限维子空间. 则 $V\oplus W$ 为 X 中的闭子空间. 特别地，X 的任意有限维子空间都是闭的.

定理 1.13 任一个 n 维赋范线性空间与 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 同胚.

进而，可以证明

定理 1.14 设 X 为赋范线性空间. 则 X 为有限维空间，当且仅当 X 是局部紧空间.

1.4 赋范线性空间的可分性

为讨论赋范线性空间的可分性，我们先引进全集、封闭集与完整集的概念.

定义 1.8 赋范线性空间 X 的子集(或子序列)A 称为全集(或全序列)，若 A 的元的有限线性组合的全体所成的集合形成 X 的稠密子空间；

X 的子集 A 称为封闭的，若每个 $x\in X$ 可用 A 中有限多个元的线性组合以任意精度来逼近；

X 的子集 A 称为完整的，若 X 上的任一连续线性式 φ 在 A 上为 0 蕴涵

$$\varphi\equiv 0.$$

我们有

定理 1.15 若赋范线性空间 X 中存在一个全序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，则 X 是可分的，即存在 X 中一个稠密的可列集. 反之，在可分赋范线性空间中存在全序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，且其中任意有限个元是线性无关的.

§2 点集拓扑的基本知识

2.1 拓扑结构,拓扑空间

在基本集 X 上定义拓扑,通常有两种方式,一种是从定义 X 中的开集族着手,这是读者在点集拓扑学中已经熟知的;另一种是借助邻域滤系与邻域滤系基的概念确定 X 的拓扑.这两种方法是彼此等价的,而且各有其优越性,所以,以后可以根据需要采用两种定义之一.

定义 2.1 基本集 X 上的子集族 $\mathscr{F}$ 称为 X 上的滤系,若

(1) $\varnothing\notin\mathscr{F}$;

(2) $F\in\mathscr{F}$,则任何包含 F 的 X 的子集 G 也属于 $\mathscr{F}$;

(3) $F_1,F_2\in\mathscr{F}$,则 $F_1\cap F_2\in\mathscr{F}$.

X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 上的滤系基,若 $\mathscr{B}$ 满足上述(1)与

(2′) $B_1,B_2\in\mathscr{B}$,则存在 $B\in\mathscr{B}$,使 $B\subset B_1\cap B_2$.

不难证明,X 上的任一滤系基可产生一个滤系.

定义 2.2 对非空集 X 中的每一点 x,若存在 X 的一个子集族,记为 $\mathscr{U}(x)$,满足:

(1) $\mathscr{U}(x)$是 X 上的滤系;

(2) 若 $U\in\mathscr{U}(x)$,则 $x\in U$;

则称 $\mathscr{U}(x)$是含 x 的滤系.

如果含 x 的滤系 $\mathscr{U}(x)$所生成的族$\{\mathscr{U}(x):x\in X\}$满足:

(3) 若 $U\in\mathscr{U}(x)$,则存在 $W\in\mathscr{U}(x)$,使 $W\subset U$,且对所有 $y\in W$,都成立 $U\in\mathscr{U}(y)$.

则称$\{\mathscr{U}(x):x\in X\}$为 X 的邻域滤系族;称 $\mathscr{U}(x)$为 x 的邻域滤系;而每个 $U\in\mathscr{U}(x)$称为 x 的邻域.

类似地,X 的子集族 $\mathscr{B}(x)$,$x\in X$,如果满足:

(1) $\mathscr{B}(x)$是 X 上的滤系基;

(2) 若 $V\in\mathscr{B}(x)$，则 $x\in V$；

则称 $\mathscr{B}(x)$ 是含 x 的滤系基；并且如果含 x 的滤系基族 $\{\mathscr{B}(x):x\in X\}$ 满足

(3) 若 $V\in\mathscr{B}(x)$，则存在 $W\in\mathscr{B}(x)$，使 $W\subset V$，且对每个 $y\in W$，存在 $V_1\in\mathscr{B}(y)$ 且 $V_1\subset V$.

则称 $\{\mathscr{B}(x):x\in X\}$ 为 X 的邻域滤系基族；称 $\mathscr{B}(x)$ 为 x 的邻域滤系基.

当 X 中的上述邻域滤系族或邻域系基族给定后，就称 X 为一个拓扑空间，记为 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$. 也常称邻域滤系族 $\{\mathscr{U}(x):x\in X\}$ 为 X 的拓扑结构.

在拓扑空间 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 中定义开集如下.

定义 2.3 设 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 为拓扑空间，X 的子集 Q 称为开集，若 $Q=\varnothing$，或者 $Q\neq\varnothing$，且对任何 $x\in Q$，存在 x 的一个邻域 $U\in\mathscr{U}(x)$，满足 $U\subset Q$.

不难证明，任意多个开集的并是开集；有限多个开集之交也是开集.

同一基本集上可以赋予不同的拓扑结构，因此拓扑结构常需互相比较.

定义 2.4 基本集 X 的任意两个子集族 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 若满足下述条件：对每个集 $A\in\mathscr{F}$，都存在子集 $B\subset A$，使 $B\in\mathscr{G}$，则称 $\mathscr{F}$ 比 $\mathscr{G}$ 粗，或 $\mathscr{G}$ 比 $\mathscr{F}$ 精.

对于基本集 X 上的两个拓扑结构

$$(X,\{\mathscr{U}_1(x)\}) \quad 与 \quad (X,\{\mathscr{U}_2(x)\}),$$

作为 X 的子集族 $\mathscr{U}_1(x)$ 与 $\mathscr{U}_2(x)$，若对每个 $x\in X$，都有 $\mathscr{U}_1(x)$ 比 $\mathscr{U}_2(x)$ 粗，则称拓扑结构 $\{\mathscr{U}_1(x):x\in X\}$ 比拓扑结构 $\{\mathscr{U}_2(x):x\in X\}$ 粗；或 $\{\mathscr{U}_2(x):x\in X\}$ 比 $\{\mathscr{U}_1(x):x\in X\}$ 精. 两个拓扑结构彼此等价的定义可由精、粗概念给出. 我们从略.

在拓扑空间 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 中，可以定义内点与内部、触点与聚点、闭包与闭集等等. 还可证明，从开集出发定义拓扑空间 $(X,$

τ)，这里 τ 是 X 中的开集族，与从邻域滤系出发定义的拓扑空间是彼此等价的（留作练习）.

2.2 连续映射，格网

定义 2.5 设 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 与 $(Y,\{\mathscr{V}(y)\})$ 为两个拓扑空间，$f: X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射. 我们称映射 f 在一点 $x\in X$ 连续，若对 $y=f(x)$ 的每个邻域 $V\in\mathscr{V}(y)$，都存在 x 的邻域 $U\in\mathscr{U}(x)$，使得 $f(U)\subset V$，或等价地，$U\subset f^{-1}(V)$.

若 f 在 X 的每一点都连续，就称 f 在 X 中连续. 又若 f 是 X 到 Y 上的一一映射，且 f 与 f^{-1} 都连续，就称 f 是 X 到 Y 上的同胚映射. 若两个拓扑空间 X 与 Y 之间存在同胚映射，则称 X 与 Y 同胚.

我们有连续映射的等价性定理.

定理 2.1 设 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 与 $(Y,\{\mathscr{V}(y)\})$ 为两个拓扑空间，$f: X\to Y$ 为 X 到 Y 的映射，则下述各论断彼此等价：

(1) f 是 X 中的连续映射；

(2) 对于 $x\in X$，映射 $y=f(x)$ 在 Y 中的任一个邻域 $V\in\mathscr{V}(y)$，其原像集 $f^{-1}(V)\in\mathscr{U}(x)$；

(3) Y 中任一开集的原像集是 X 中的开集；

(4) Y 中任一闭集的原像集是 X 中的闭集；

(5) 若 $B\subset Y$，则 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$；

(6) 若 $A\subset X$，则 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

格网的概念是序列概念的一种推广.

定义 2.6 设非空集 Δ 关于序关系“$\geqslant$”成为一个半序集. 若对 Δ 中的任意一对元 $\alpha,\beta\in\Delta$，存在元 $\gamma\in\Delta$，使 $\gamma>\alpha,\gamma>\beta$，则称 Δ 为有向集.

定义 2.7 设 Δ 为有向集，X 为拓扑空间，对映射 $\varphi: \Delta\to X$，称 X 中的以有向集 Δ 为指标集的点集 $\{\varphi(\delta): \delta\in\Delta\}$ 为 Δ 上的一

个格网.

定义 2.8 称拓扑空间 X 中的格网 $\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$ 收敛于元 $x\in X$，是指对 x 的任意邻域 $U_x\in\mathscr{U}(x)$，存在 $\delta_0\in\Delta$，使得当 $\delta\in\Delta$ 且 $\delta>\delta_0$ 时，有 $\varphi(\delta)\in U_x$，并称元 x 为格网 $\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$ 的极限.

作为子序列概念的推广，我们定义子格网如下：

定义 2.9 设 $\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$ 为拓扑空间 X 中的格网. 我们称 X 中的另一个格网 $\{\psi(\gamma):\gamma\in\Gamma\}$ 为 $\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$ 的子格网，若存在 Γ 到 Δ 的映射 $S:\Gamma\to\Delta$，满足：

(1) 对每个 $\gamma\in\Gamma$，有 $\psi(\gamma)=\varphi(S(\gamma))$，亦即存在 $\delta\in\Delta$，使得 $\delta=S(\gamma)$，并且 $\psi(\gamma)=\varphi(\delta)$ 成立.

(2) 对每个 $\delta_0\in\Delta$，存在 $\gamma_0\in\Gamma$，使当 $\gamma>\gamma_0$（按 Γ 中的序关系）时，有 $S(\gamma)>\delta_0$（按 Δ 中的序关系）.

注意在这个定义中，Γ 不必是 Δ 的子集.

2.3 子空间，积空间，商空间

现在讨论与拓扑空间 $(X,\{\mathscr{U}(x)\})$ 的拓扑结构有密切联系的三种空间：子空间、积空间与商空间.

2.3.1 子空间

定义 2.10 设 X 为拓扑空间，$\{\mathscr{U}_X(x):x\in X\}$ 为 X 的邻域滤系族，X_0 为 X 的一个非空子集. 记

$$\mathscr{U}_{X_0}=\{V\subset X_0:V=U\cap X_0,U\in\mathscr{U}_X(x)\}.$$

易知，对每个 $x\in X_0$，$\mathscr{U}_{X_0}(x)$ 是 x 在 X_0 中的邻域滤系. X_0 在这样的拓扑结构下成为一个拓扑空间 $(X_0,\{\mathscr{U}_{X_0}(x)\})$，称之为 $(X,\{\mathscr{U}_X(x)\})$ 的子拓扑空间，简称为子空间；并且称 X_0 中的拓扑结构 $\{\mathscr{U}_{X_0}(x):x\in X_0\}$ 为 $\{\mathscr{U}_X(x):x\in X\}$ 的相对拓扑.

定理 2.2 设 $(X_0,\{\mathscr{U}_{X_0}(x)\})$ 为拓扑空间 $(X,\{\mathscr{U}_X(x)\})$ 的子空间. 则

(1) 对于 X_0 的子集 Q_0，Q_0 是 X_0 中的开集，当且仅当

$$Q_0 = Q \cap X_0,$$

这里 Q 是 X 中的开集.

(2) 对于 X_0 的子集 F_0, F_0 是 X_0 中的闭集,当且仅当

$$F_0 = F \cap X_0,$$

这里 F 是 X 中的闭集.

(3) X_0 的子集 H_0 关于 X_0 的闭包 $\overline{(H_0)}_{X_0}$ 有下式成立

$$\overline{(H_0)}_{X_0} = \overline{H}_0 \cap X_0,$$

这里 $\overline{H}_0$ 是 H_0 在 X 中的闭包.

2.3.2 积空间

定义 2.11 设

$$\{(X_l, \{\mathscr{U}_{X_l}(x_l)\}) : l \in I\}$$

为一族拓扑空间,定义它们的积集为集合

$$\prod_{l \in I} X_l = \{x : x = (x_l),\ x_l \in X_l, l \in I\}.$$

当 I 为有限集时,例如 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$,积集 $\prod\limits_{l \in I} X_l$ 记为 $X_1 \times \cdots \times X_m$.

设 $\{l_1, \cdots, l_n\} \subset I$ 为 I 的任一有限集,记 $\mathscr{B}_{\Pi X_l}$ 为

$$\Big\{U \subset \prod_{l \in I} X_l : U = U_{l_1} \times \cdots \times U_{l_n} \times \prod_{l_k \neq l_k} X_1,$$

$$U_{l_k} \in \mathscr{B}_{X_{l_k}}(x_{l_k}), k = 1, \cdots, n\Big\}$$

其中 $\mathscr{B}_{X_{l_k}}(x_{l_k})$ 是 x_{l_k} 在 X_{l_k} 中的邻域滤系基. 易见 $\mathscr{B}_{\Pi X_l}$ 是

$$x = (x_l) \in \prod_{l \in I} X_l$$

的邻域滤系基. $\prod\limits_{l \in I} X_l$ 在这样的拓扑结构下成为一个拓扑空间,称为拓扑空间族

$$\{(X_l, \{\mathscr{U}_{X_l}(x_l)\}) : l \in I\}$$

的积拓扑空间,简称积空间.

定理 2.3 在积空间 $X = \prod_{l\in I} X_l$ 中,形如

$$A = \prod_{l\in I} A_l, \quad A_l \subset X_l, l \in I$$

的积集 A 的闭包是诸 A_l 在 X_l 中的闭包之积集,亦即

$$\overline{A} = \prod_{l\in I} \overline{A}_l.$$

从而积集 $\prod_{l\in I} A_l$ 在积空间 $\prod_{l\in I} X_l$ 中是闭集,当且仅当每个集 $A_l, l\in I$,在 X_l 中是闭集.

2.3.3 商空间

定义 2.12 设 X 为拓扑空间. 对 X 中任意元 x 与 y,称 x 与 y 按关系~彼此等价,记为 $x\sim y$,若满足:

(1) 自返性: $x\sim x$;

(2) 对称性: $x\sim y$,当且仅当 $y\sim x$;

(3) 传递性: $x\sim y, y\sim z$,则 $x\sim z$.

把 X 中的元按等价关系~分为等价类,并记与每个 $a\in X$ 等价的元的全体为

$$X_a = \{x \in X : x \sim a\},$$

称为 a 的等价类. 等价类的全体记为 $\widetilde{X}=\{X_a : a\in X\}$,并称其为 X 关于等价关系~的商集. 令 $\pi : a\rightarrow X_a$ 为 X 到 $\widetilde{X}$ 的映射,称为商映射.

设 $\{\mathscr{B}_X(x) : x\in X\}$ 为拓扑空间 X 的一个邻域滤系基族. 对每个 $x\in X$,令

$$\mathscr{B}_{\widetilde{X}}(\pi(x)) = \{V \subset \widetilde{X} : \pi(x) \in V, \text{且存在 } W \in \mathscr{B}_X(x), \text{使 } W \subset \pi^{-1}(V)\}.$$

易见,$\mathscr{B}_{\widetilde{X}}(\pi(x)), x\in X$,是 $\pi(x)$ 在 $\widetilde{X}$ 中的邻域滤系基,从而使

$$(\widetilde{X}, \{\mathscr{B}_{\widetilde{X}}(\pi(x))\})$$

成为一个拓扑空间,称为 X 关于等价关系~的商拓扑空间,简称商空间.

定理 2.4 设 $\widetilde{X}$ 为 X 关于~的商空间,Y 为一拓扑空间. 则

映射 $f: \tilde{X} \to Y$ 连续,当且仅当 $f \circ \pi$ 为 X 到 Y 的连续映射,这里 π 是 X 到 $\tilde{X}$ 的商映射.

作为特例,由此定理可推知:商拓扑是使商映射为连续的最精拓扑.

相对拓扑、积拓扑和商拓扑都还有很多重要性质,读者可参看本书各个章节中关于它们的应用.

2.4 分离性

拓扑空间的分离性在研究极限、连续性、紧性等问题时起着重要作用,它也是将拓扑空间进行分类的一种原则.

定义 2.13 设$(X, \{\mathscr{U}_X(x)\})$为拓扑空间,对于任意两点 x, $y \in X$, $x \neq y$,我们定义

(1) x 与 y 是弱可分的,若至少对一个点,例如 x,存在 $U \in \mathscr{U}_X(x)$,使 $y \notin U$.

(2) x 与 y 是可分的,若存在 $U \in \mathscr{U}_X(x)$, $V \in \mathscr{U}_X(y)$,使

$$x \notin V, \quad y \notin U.$$

(3) x 与 y 是隔离的,若存在 $U \in \mathscr{U}_X(x)$, $V \in \mathscr{U}_X(y)$,使

$$U \cap V = \varnothing.$$

同样可定义两个互斥集(即两两互不相交)的弱可分,可分与隔离性.

定义 2.14(分离性公理) 设 X 为拓扑空间,

(1) T_0 **公理**:若 X 中任意两点 x, y 都是弱可分的,则称 X 满足 T_0 公理,并称 X 为 T_0 型拓扑空间.

(2) S_1 **公理**:若 X 中任意两个弱可分的点都是可分的,则称 X 满足 S_1 公理,并称 X 为 S_1 型拓扑空间.

(2′) T_1 **公理**:若 X 中任意两点 x, y 都是可分的,则称 X 满足 T_1 公理,并称 X 为 T_1 型拓扑空间.

(3) S_2 **公理**:若 X 中任意两个弱可分的点都是隔离的,则称 X 满足 S_2 公理,并称 X 为 S_2 型拓扑空间.

(3′) T_2 **公理**：若 X 中任意两点 x,y 都是隔离的，则称 X 满足 T_2 公理，并称 X 为 T_2 型拓扑空间，或称为 Hausdorff 空间.

(4) S_3 **公理**：若 X 中任一点 $x\in X$ 与不含 x 的非空闭集 F 都是隔离的，亦即存在 x 的邻域 $U\in\mathscr{U}_X(x)$ 及 F 的邻域 V（就是包含 F 的开集），使 $U\cap V=\varnothing$，则称 X 满足 S_3 公理，或正则性公理，并称 X 为 S_3 型拓扑空间，或称为正则空间.

(4′) T_3 **公理**：若 X 是满足 S_3 公理的 T_0 型拓扑空间，则称 X 满足 T_3 公理，并称 X 为 T_3 型拓扑空间.

(5) **正规公理**：若 X 中任意两个互斥闭集都是隔离的，亦即，若 F_1,F_2 为 X 中的两个闭集，且

$$F_1\cap F_2=\varnothing,$$

则存在两个开集 U_1,U_2，使

$$F_1\subset U_1,\quad F_2\subset U_2,$$

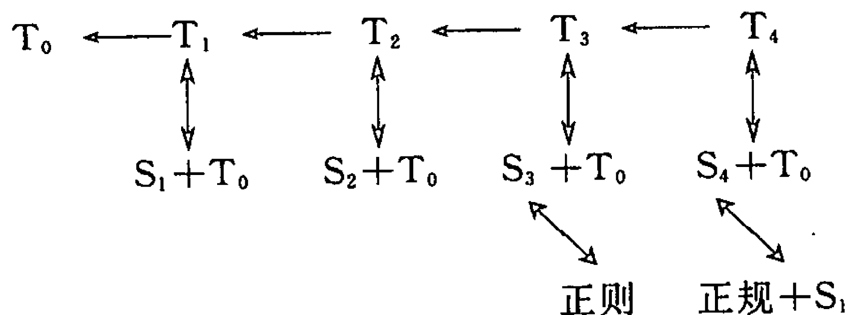
且 $U_1\cap U_2=\varnothing$，我们便称 X 满足正规公理，并称 X 为正规空间.

(5′) S_4 **公理**：若 X 是满足 S_1 公理的正规空间，则称 X 满足 S_4 公理，并称 X 为 S_4 型拓扑空间.

(5″) T_4 **公理**：若 X 是满足 S_4 公理的 T_0 型空间，则称 X 满足 T_4 公理，并称 X 为 T_4 型拓扑空间.

还可定义完正规公理，S_5 公理与 T_5 公理. 此处从略.

我们用下面的图表给出部分类型空间的关系：



每种类型的空间都有一些重要性质. 我们列举一部分常用的.

定理 2.5 拓扑空间是 T_1 型的，当且仅当其单点集为闭集.

定理 2.6 拓扑空间 X 是 T_2 型的，当且仅当 X 中的每个收敛格网的极限是唯一的.

定理 2.7 拓扑空间是正则的，当且仅当对任意一点 $x\in X$ 与它的任一个邻域 $U\in\mathscr{U}_X(x)$，存在开集 $Q\subset X$，满足

$$x\in Q\subset\overline{Q}\subset U.$$

定理 2.8 拓扑空间是正规的，当且仅当对 X 中任意闭集 F 与包含它的开集 G，存在开集 $Q\subset X$，满足

$$F\subset Q\subset\overline{Q}\subset G.$$

正规空间中有三个非常有用的定理，它们是 Urysohn 引理、Tietze 扩张定理与 Dieudonné 单位分解定理.

定理 2.9(Urysohn 引理) 拓扑空间 X 为正规空间，当且仅当对于 X 中的任意两个互斥闭集 A 与 B，存在 X 上的实值连续函数 f，满足

$$f(x)|_{x\in A}=0,\quad f(x)|_{x\in B}=1,$$

且对每个 $x\in A$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.

定理 2.10(Tietze 扩张定理) 拓扑空间 X 为正规空间，当且仅当对 X 中的任意闭集 F 与定义在 F 上的任一连续实函数 f，存在 f 在 X 上的连续扩张，亦即存在定义在 X 上的连续函数 φ，使得 $\varphi|_F=f$.

定理 2.11(Dieudonné 单位分解定理) 设 X 为正规空间，F 为 X 中的闭集，$U_1,\cdots,U_n$ 为 X 中的开集，使

$$F\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_j.$$

则存在 X 上的连续函数 $h_1,\cdots,h_n$，满足

(1) $|h_j(x)|\leqslant 1,\ x\in X, j=1,\cdots,n$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^{n}h_j(x)=1,\ x\in F$;

(3) $h_j|_{\mathscr{C}U}=0,\ j=1,\cdots,n.$

证 我们分三步证明.

第一步，设 $F=X$，则定理条件成为

$$X=\bigcup_{j=1}^{n}U_j.$$

我们证明，存在 n 个闭集 $A_j,j=1,\cdots,n$，满足

$$A_j\subset U_j,\quad 且\ X=\bigcup_{j=1}^{n}A_j.$$

这可由归纳法完成：

$n=1$ 时，取 $A_1=X$，则 $A_1=U_1=X$，故结论成立.

$n=2$ 时，因 $U_1\cup U_2=X$，故 $\mathscr{C}U_1\cap\mathscr{C}U_2=\varnothing$. 于是对于两个不相交的闭集 $\mathscr{C}U_1$ 与 $\mathscr{C}U_2$，由 X 的正规性，存在开集 V_1,V_2，使得

$$\mathscr{C}U_1\subset V_1,\quad U_2\subset V_2,\quad 且\ V_1\cap V_2=\varnothing.$$

令 $A_1=\mathscr{C}V_1,A_2=\mathscr{C}V_2$，则 A_1,A_2 为闭集，满足

$$A_1\subset U_1,\quad A_2\subset U_2,\quad A_1\cup A_2=X.$$

故结论成立.

一般地，若 $n-1$ 时结论成立. 令

$$X=\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}U_j\right)\cup U_n.$$

由 $n=2$ 时的结论推得，存在闭集 $A\subset\bigcup_{j=1}^{n-1}U_j$ 与闭集 $A_n\subset U_n$，使

$$A\cup A_n=X.$$

对于

$$A=\bigcup_{j=1}^{n-1}U_j,$$

令 $V_j=A\cap U_j$，若视 A 为 X 的闭子空间，则它是正规的（请读者自行证明）. 于是由归纳假设，A 中存在 $n-1$ 个闭集 $A_1,\cdots,A_{n-1}$，满足

$$A_j\subset V_j\quad j=1,\cdots,n-1,\quad 且\bigcup_{j=1}^{n-1}A_j=A.$$

同时，$A_j(j=1,\cdots,n-1)$也是 X 中的闭集，满足

$$A_j \subset U_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

从而 $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，$A_j$ 为 X 中的闭集，且 $A_j \subset U_j$.

第二步，继第一步，由于

$$F = X = \bigcup_{j=1}^{n} U_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \quad A_j \subset U_j, \ j = 1, \cdots, n,$$

现在对每一对 A_j 与 $\mathscr{C}U_j$，利用 Urysohn 引理，存在 X 上的连续函数 f_j，使

$$0 \leqslant f_j \leqslant 1, \quad f_j|_{A_j} = 1, \quad f_j|_{\mathscr{C}U_j} = 0.$$

令

$$h_j(x) = \frac{f_j(x)}{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}, \quad x \in X.$$

因 $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，每个 $x \in X$ 必至少落在一个 A_j 之中，从而

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant 1.$$

再由 $0 \leqslant f_j \leqslant 1$，知 $0 \leqslant h_j(x) \leqslant 1$，故(1)成立. (2)与(3)显然成立.

第三步，若 $F \subset X$ 为 X 的闭子集，令 $U_0 = \mathscr{C}F$，则得

$$X = \bigcup_{j=0}^{n} U_j.$$

据第二步结果，存在 X 上的 $n+1$ 个连续函数 h_j，$j = 0, 1, \cdots, n$，满足(1)～(3). 但当 $x \in F$ 时，$h_0(x) = 0$，于是

$$\sum_{j=0}^{n} h_j(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x),$$

这样，$h_1, \cdots, h_n$ 满足(1)～(3). 定理得证.

2.5 紧性

我们介绍紧性、局部紧性、列紧性与仿紧性.

2.5.1 紧性

定义 2.15 拓扑空间 X 称为紧空间，若对 X 的任一个开覆盖 $\{G_l\}_{l\in I}$，总存在有限子覆盖 $\{G_1,\cdots,G_n\}$. X 的子集 A 称为紧集，若 A 作为 X 的子空间是一个紧空间.

关于紧性，有如下有用的结果.

定理 2.12 在拓扑空间 X 中，下列论断彼此等价

(1) X 是紧空间；

(2) X 中的闭集族 $\mathscr{F}$ 若具有有限交性质，亦即若闭集族

$$\mathscr{F}=\{F_l\subset X: F_l=\overline{F}_l, l\in I\}$$

中任意有限多个闭集之交非空，则 $\mathscr{F}$ 中全部闭集之交非空；

(3) X 中的每个格网都有收敛的子格网.

定理 2.13 在紧拓扑空间中，闭集为紧集；而在 T_2 型拓扑空间中，紧集为闭集.

定理 2.14 紧 T_2 型拓扑空间是 T_4 型的.

定理 2.15 设 X 为紧拓扑空间，$f: X\to Y$ 为 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，则 $f(X)$ 为 Y 中的紧集. 又若 $A\subset X$ 为紧集，则集合 $f(A)$ 也是 Y 中紧集.

定理 2.16（Тихонов 定理） 设 $\{X_l: l\in I\}$ 为一族拓扑空间. 积空间 $\prod\limits_{l\in I}X_l$ 是紧空间，当且仅当每个因子空间 X_l 是紧空间.

2.5.2 局部紧性

定义 2.16 拓扑空间 X 称为局部紧空间，若 X 的每一点 x 都存在紧闭包邻域（即此邻域的闭包是紧集）.

拓扑空间 X 中的子集 A 若具有紧闭包，亦即 $\overline{A}$ 在 X 中为紧集，则称 A 为相对紧集. 因此，局部紧空间就是每一点都有相对紧邻域的拓扑空间.

在 Hausdorff 空间中，紧闭包邻域可改为紧邻域. 亦即，T_2 型拓扑空间称为局部紧的，若 X 的每一点都存在紧邻域.

定理 2.17 设 X 为 T_2 型局部紧空间. $U\subset X$ 为开集，且 $x\in$

U,则存在 x 的紧邻域 V,使得

$$x \in V \subset U.$$

定理 2.18 设 X 为 T_2 型局部紧空间,$K \subset U \subset X$,这里 K 为紧集,U 为开集.则存在一个相对紧开集 V,使

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

定理 2.19(局部紧空间上的 Urysohn 引理) 设 X 为 T_2 型局部紧空间,$K \subset U \subset X$,这里 K 为紧集,U 为开集,则存在 X 上的连续函数 f,使得

$$f|_K = 1, \quad f|_{\complement V} = 0, \quad 0 \leqslant f \leqslant 1,$$

其中 V 是 U 的某个紧子集.

定理 2.20(局部紧空间上的 Tietze 扩张定理) 设 X 为 T_2 型局部紧空间,$K \subset X$ 为紧集.若 f 为 K 上的连续实函数,则存在 X 上的连续函数 g,使 $g|_K = f$.

定理 2.21(单点紧化定理) 拓扑空间 X 有单点紧化空间 $\widetilde{X}$,当且仅当 X 是 T_2 型局部紧空间.这里的 $\widetilde{X}$ 是满足

$$\widetilde{X} = X \cup \{a\}, \quad a \notin X$$

的 T_2 型紧拓扑空间,称为 X 的单点紧化空间.

定理 2.22(Тихонов 定理) 积空间 $\prod\limits_{l \in I} X_l$ 是局部紧空间,当且仅当诸因子空间中,除有限个是局部紧的外,其余空间都是紧的.

2.5.3 列紧性

由 Bolzano-Weierstrass 定理启发而得到的列紧性的概念可简要叙述如下.

定义 2.17 拓扑空间 X 称为列紧空间,若 X 的每个点列 $\{x_n\}_{n \in N}$都有收敛的子序列. X 的子集 A 称为列紧集,若 A 作为 X 的子空间是一个列紧空间.

定理 2.23 设 X 为列紧空间,则

(1) X 中任一渐缩非空闭集列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ 有非空交;

(2) X 的任一可数开覆盖有有限子覆盖(覆盖式列紧性);

(3) X 的任一无穷子集至少有一个聚点(子集式列紧性).

定理 2.24 在列紧空间中,闭集为列紧集.

定理 2.25 设 X 为列紧空间,$f: X \to Y$ 为 X 到拓扑空间 Y 的连续映射,则 $f(X)$ 为 Y 中的列紧集. 又若 $A \subset X$ 为列紧集,则 $f(A)$ 也是 Y 中的列紧集.

第一和第二可数公理如下.

定义 2.18 设 (X, τ) 为拓扑空间,这里 τ 为 X 中的开集族. 我们称 X 中的开集族 $\mathscr{B}$ 为 X 的开基,若 $\mathscr{B} \subset \tau$,且 τ 中每个开集都可表为 $\mathscr{B}$ 中某些开集的并.

称拓扑空间 X 满足第二可数公理,若 X 具有可数开基

$$\mathscr{B} = \{U_1, U_2, \cdots\}.$$

称拓扑空间 X 满足第一可数公理,若每个 $x \in X$ 都有一个可数的邻域基.(一点 x 的邻域基 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的一个邻域集族,它满足:对包含 x 的任一开集 G,存在 $U \in \mathscr{B}(x)$,使得 $x \in U \subset G$.)

定理 2.26 紧性与列紧性有如下关系:

(1) 在一般拓扑空间中,

紧性 $\Rightarrow$ 覆盖式列紧性 $\Rightarrow$ 子集式列紧性.

列紧性 $\Rightarrow$ 覆盖式列紧性 $\Rightarrow$ 子集式列紧性.

(2) 在满足第二可数公理的拓扑空间中,

紧性 $\Leftrightarrow$ 列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性 $\Rightarrow$ 子集式列紧性.

(3) 在满足第一可数公理的拓扑空间中,

列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性 $\Rightarrow$ 子集式列紧性.

(4) 在 T_1 型拓扑空间中,

覆盖式列紧性 $\Leftrightarrow$ 子集式列紧性.

(5) 在满足第一可数公理的 T_1 型拓扑空间中,

列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性 $\Leftrightarrow$ 子集式列紧性.

2.5.4 仿紧性

定义 2.19 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 称为局部有限的,若空

间中的每一点 x 都存在一个邻域 U,使 U 只与 $\mathscr{F}$ 中有限多个集合相交.

设 W_1 与 W_2 为拓扑空间 X 的两个覆盖,我们称 W_1 为 W_2 的加细,若对每个 $V\in W_1$,存在 $U\in W_2$,使得 $V\subset U$.

称拓扑空间 X 为仿紧空间,若它的每个开覆盖总存在局部有限的加细开子覆盖.

仿紧集的定义方法与紧集相同.

由于有限覆盖必为局部有限的,因此紧空间必为仿紧空间.

定理 2.27 在仿紧拓扑空间中,闭集为仿紧集.

定理 2.28 仿紧 T_2 型拓扑空间是正规空间.

定理 2.29 由可数个紧集之并所构成的 T_2 型局部紧拓扑空间是仿紧空间. 从而 n 维欧氏空间($n\geqslant 1$)为仿紧空间.

定理 2.30 距离空间是仿紧空间.

2.6 可分性与连通性

2.6.1 可分性

设 $A\subset X$ 为拓扑空间 X 的子集,称 A 在 X 中稠密,若

$$\overline{A}=X.$$

称 A 为无处稠密的(或疏的),若 $\mathscr{C}\overline{A}$ 是 X 中的稠密集.

定义 2.20 我们称拓扑空间 X 为可分空间,若 X 含有一个可数的稠密集.

定理 2.31 满足第二可数公理的拓扑空间是可分的.

2.6.2 连通性

连通空间与连通性反映了“连成一块”的直觉观念.

定义 2.21 拓扑空间 X 称为连通空间,若 X 中既开又闭的集合仅有空集 $\varnothing$ 与 X 自身. 连通子集可如紧子集、仿紧子集等那样类似地定义.

定理 2.32 拓扑空间 X 是连通的,当且仅当 X 中不存在非空开集 A 与 B,使

$$A \cup B = X, \quad A \cap B = \varnothing.$$

定理 2.33 设$\{A_l : l \in I\}$为拓扑空间 X 中的连通子集族. 若

$$\bigcap_{l \in I} A_l \neq \varnothing,$$

则 $\bigcup_{l \in I} A_l$ 为连通集.

定理 2.34 设 A 为拓扑空间 X 的连通子集. 则满足 $A \subset B \subset \overline{A}$ 的子集 B 也连通,从而 $\overline{A}$ 连通.

定理 2.35 设 X 为拓扑空间,$x \in X$ 为 X 中的任一点,记 P 为包含 x 的所有连通集的并,则 P 为闭连通集.

定义 2.22 设 X 为拓扑空间. 我们称包含 x 的所有连通子集的并为 x 的点的连通分支(也称连通分支),记为 $c(x)$. 同样可定义一个集合的连通分支.

若 X 中的每个连通分支仅包含一点,即 $c(x)=\{x\}$,则称 X 为全不连通空间(或称全断型空间).

定理 2.36 在拓扑空间 X 中,对于任意两点 x,y,其连通分支 $c(x)$与 $c(y)$具下述性质: 若 $y \in c(x)$,则

$$c(x) = c(y);$$

若 $y \notin c(x)$,则

$$c(x) \cap c(y) = \varnothing.$$

从而连通空间 X 只有一个连通分支,就是 X 自身.

定理 2.37 设 X,Y 为拓扑空间. $f: X \to Y$ 为连续映射,若 A 为 X 的连通集,则 $f(A)$为 Y 中的连通集.

定理 2.38 积空间 $\prod_{l \in I} X_l$ 为连通空间,当且仅当每个因子空间 X_l 连通.

2.6.3 *局部连通性*

定义 2.23 拓扑空间 X 称为局部连通的,若 X 中每一点都有由连通集组成的邻域滤系基.

连通空间未必局部连通,有如下的例子.

例 设 $X=\boldsymbol{R}^2$ 为二维欧氏空间. 集合 S_a 定义如下:

$$S_a=\begin{cases}\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x=a, 0<y\leqslant 1\}, & a\text{ 为有理数},\\ \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x=a, -1\leqslant y\leqslant 0\}, & a\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

S_a 作为 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间是连通空间,却并非局部连通.

局部连通空间也未必连通. 例如取 $X=\boldsymbol{R}$,点集

$$E=(-1,0)\cup(0,1)$$

是局部连通的,但却不连通.

定理 2.39 X 为局部连通空间,当且仅当 X 的每个非空开集的连通分支是开集. 从而局部连通空间中的每个连通分支都是既开又闭的连通集.

定理 2.40 拓扑空间 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 为局部连通的,当且仅当诸因子空间 $X_1,\cdots,X_n$ 为局部连通的.

§3 多重线性映射空间,连续映射空间

多重线性映射在 Banach 空间微分学、对偶理论及流形上的分析等很多部分都起着重要作用. 连续映射空间、Banach 代数,以及 Stone-Weierstrass 定理、Arzela-Ascoli 定理更是近代分析学的基本内容和重要工具. 本章将对这些内容作稍为详细的介绍.

3.1 多重线性映射

定义 3.1 设$(X_1,\|\cdot\|_1),\cdots,(X_n,\|\cdot\|_n),(Y,\|\cdot\|_Y)$为赋范线性空间,积空间 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的映射

$$u:(x_1,\cdots,x_n)\rightarrow y=u(x_1,\cdots,x_n)$$

称为 n 重线性映射,若 $u(x_1,\cdots,x_n)$关于它的每个变元都是线性的.

当 $n=1$ 时,它就是赋范线性空间$(X,\|\cdot\|_X)$到赋范线性空间$(Y,\|\cdot\|_Y)$的线性映射 $u(x)$. 此时,如在泛函分析教程中那样,若线性算子 u 具有有界性:即若存在常数 $c>0$,使对每个 $x\in$

X，有

$$\| u(x) \|_Y \leqslant c \| x \|_X,$$

则称 u 为有界线性映射.

我们有熟知的定理.

定理 3.1 设 $(X, \| \cdot \|_X)$ 与 $(Y, \| Y \|_Y)$ 为赋范线性空间，$u: X \to Y$ 为线性映射，则下列论断彼此等价

(1) u 为连续映射；

(2) u 在 X 的零元 θ 连续；

(3) u 为有界映射.

对于多重线性映射，我们有

定理 3.2 设 $(X_1, \| \cdot \|_1), \cdots, (X_n, \| \cdot \|_n), (Y, \| \cdot \|_Y)$ 为赋范线性空间，u 为积空间 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 到 Y 的 n 重线性映射. 则 u 为连续映射，当且仅当存在常数 $c>0$，使对任意的 $(x_1, \cdots, x_n) \in X$，有

$$\| u(x_1, \cdots, x_n) \|_Y \leqslant c \| x_1 \|_1 \cdots \| x_n \|_n.$$

证 仅就 $n=2$ 情形证明.

必要性. 设 $u(x_1, x_2)$ 为连续映射，则 u 在 $(\theta_1, \theta_2) \in X = X_1 \times X_2$ 连续，这里 θ_1 与 θ_2 分别为 X_1 与 X_2 的零元. 于是取 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使当

$$\max(\| x_1 - \theta_1 \|_1, \| x_2 - \theta_2 \|_2) = \max(\| x_1 \|_1, \| x_2 \|_2) \leqslant \delta$$

时，

$$\| u(x_1, x_2) - u(\theta_1, \theta_2) \|_Y = \| u(x_1, x_2) \|_Y \leqslant 1.$$

这表明

$$\| u(x_1, x_2) \|_Y \leqslant 1, \tag{3.1}$$

在闭球

$$\begin{aligned} B &\equiv B((\theta_1, \theta_2), \delta) \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \max(\| x_1 \|_1, \| x_2 \|_2) \leqslant \delta\} \end{aligned}$$

中成立. 令 $c = 1/\sqrt{\delta}$，我们证明，对任一元 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$，都

有

$$\| u(x_1,x_2) \|_Y \leqslant c \| x_1 \|_1 \| x_2 \|_2. \tag{3.2}$$

事实上,若 x_1 或 x_2 为零元,则 $u=0$,(3.2)式显然成立.对于 $x_1\neq\theta_1, x_2\neq\theta_2$,因有 $\| x_1 \|_1>0$, $\| x_2 \|_2>0$,可令

$$z_1 = \frac{\delta x_1}{\| x_1 \|_1}, \quad z_2 = \frac{\delta x_2}{\| x_2 \|_2},$$

则 $(z_1,z_2)\in X_1\times X_2$,且 $\| z_1 \|_1=\delta$, $\| z_2 \|_2=\delta$,故 $(z_1,z_2)\in B$.于是(3.1)式对 (z_1,z_2) 有下式成立:

$$\| u(z_1,z_2) \|_Y \leqslant 1.$$

但因

$$u = (z_1,z_2) = \frac{\delta^2}{\| x_1 \|_1 \cdot \| x_2 \|_2} u(x_1,x_2),$$

从而

$$\| u(x_1,x_2) \|_Y \leqslant \delta^{-2} \| x_1 \|_1 \cdot \| x_2 \|_2 = c \| x_1 \|_1 \cdot \| x_2 \|_2.$$

必要性得证.

充分性.任取 $(x_1^0,x_2^0)\in X_1\times X_2$,由假设条件,

$$\begin{aligned}
&\| u(x_1,x_2) - u(x_1^0,x_2^0) \|_Y \\
&\quad \leqslant \| u(x_1 - x_1^0,x_2) \|_Y + \| u(x_1^0,x_2 - x_2^0) \|_Y \\
&\quad \leqslant c\{ \| x_1 - x_1^0 \|_1 \cdot \| x_2 \|_2 + \| x_1^0 \|_1 \cdot \| x_2 - x_2^0 \|_2 \}.
\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$,取

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{c(\| x_1^0 \| + \| x_2^0 \| + 1)}\right),$$

则当

$$\max\{ \| x_1 - x_1^0 \|_1, \| x_2 - x_2^0 \|_2\} \leqslant \delta$$

时,有 $\| u(x_1,x_2)-u(x_1^0,x_2^0) \|_Y \leqslant \varepsilon$.从而充分性得证.

由定理 3.2 可得

定理 3.3 设 X 为赋范线性空间,Y 为 Banach 空间.若 $G\subset X$ 为 X 的稠密子空间,$f: G\to Y$ 为连续线性映射,则存在 X 到 Y 上的唯一的连续线性映射 $\tilde{f}$,使 $\tilde{f}|_G=f$.

读者可将此定理与 Hahn-Banach 扩张定理作个比较.

3.2 多重线性映射空间

我们先就 $n=1$ 与 $n=2$ 情形讨论,而后推广到一般情形.

定义 3.2 设 $(X,\|\cdot\|_X)$,$(Y,\|\cdot\|_Y)$ 为赋范线性空间. X 到 Y 的连续线性映射的全体所生成的集,记为 $\mathscr{L}(X;Y)$,称为 X 上的连续线性映射空间,或简称为线性映射空间.

$\mathscr{L}(X;Y)$ 有如下性质.

定理 3.4 $\mathscr{L}(X;Y)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

这只要在 $\mathscr{L}(X;Y)$ 上引入两个线性映射的加法与数乘,并验证它们满足本附录的定义 1.1 即可.

定理 3.5 $\mathscr{L}(X;Y)$ 在范数

$$\|u\| = \inf\{c: \|u(x)\|_Y \leqslant c\|x\|_X\}$$

之下成为一个赋范线性空间,并且这个范数有如下等价形式

$$\|u\| \sim \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|u(x)\|_Y \sim \sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|_Y.$$

今后,为方便起见,我们省去范数的下标,因为在哪个空间取范数是明确的,例如:$\|u\| = \|u\|_{\mathscr{L}(X;Y)}$.

定理 3.6 若 Y 是 Banach 空间,则 $\mathscr{L}(X;Y)$ 也是 Banach 空间.

定理 3.7 对于每个 $x\in X, u\in\mathscr{L}(X;Y)$ 有

$$\|u(x)\| \leqslant \|u\|\,\|x\|,$$

从而 $X\times\mathscr{L}(X;Y)$ 到 Y 的映射 $(x,u)\to u(x)$ 是连续二重线性映射.

定理 3.8 连续线性映射 $u\in\mathscr{L}(X;Y)$ 与 $v\in\mathscr{L}(Y;Z)$ 的复合 $u\circ v$ 是连续线性映射,$u\circ v\in\mathscr{L}(X;Z)$,且满足

$$\|u\circ v\| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

定理 3.9 设 Y 是实赋范线性空间,则对每个 $a\in Y$,Y 到 $\mathscr{L}(R;Y)$ 中的元 $u_a: \xi\to\xi a$ 的映射 $\varphi: a\to u_a$ 是 Y 到 $\mathscr{L}(R;Y)$ 上的线性等距.

证 易证φ是线性映射.进而,φ是满射,因为每个$a\in Y$,有u_a与之对应,而每个$f\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y)$,必取

$$f(\xi)=f(\xi\cdot 1)=\xi f(1)=\xi a$$

的形式,其中$a=f(1)$.最后由

$$\|\varphi(a)\|=\|u_a\|=\sup_{\|\xi\|=1}\|u_a(\xi)\|=\|a\|$$

知φ为连续线性等距.

定理3.9的结果也可记为$\varphi\in\mathscr{L}(Y;\mathscr{L}(\boldsymbol{R};Y))$.现将它推广到多重情形.

定义3.3 设$(X_1,\|\cdot\|_1),\cdots,(X_n,\|\cdot\|_n)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$为赋范线性空间.记由积空间$X_1\times\cdots\times X_n$到$Y$的连续$n$重线性映射的全体所生成的集为

$$\mathscr{L}(X_1,\cdots,X_n;Y),$$

称为n重线性映射空间(请注意区分$\mathscr{L}(X_1\times\cdots\times X_n;Y)$与$\mathscr{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$).在其上定义加法与数乘运算:

$$(u_1+u_2)(x_1,\cdots,x_n)=u_1(x_1,\cdots,x_n)+u_2(x_1,\cdots,x_n),$$

$$(\alpha u)(x_1,\cdots,x_n)=\alpha u(x_1,\cdots,x_n),\quad \alpha\in\mathbf{K},$$

使它成为数域$\mathbf{K}$上的线性空间.以

$$\|u\|=\inf\{c:\|u(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant c\|x_1\|\cdots\|x_n\|\}$$

作为u的范数,则$\mathscr{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$成为一个赋范数线性空间.此时,类似于定理3.6~定理3.8的结论(作一些相应的改变)也成立.定理3.9则可推广为

定理3.10 设$(X_1,\|\cdot\|_1),(X_2,\|\cdot\|_2),(Y,\|\cdot\|_Y)$为赋范线性空间.对每个$u\in\mathscr{L}(X_1,X_2;Y)$与每个$x_1\in X_1$,令$u_{x_1}$为$X_2$到$Y$的线性映射

$$u_{x_1}:x_2\to u(x_1,x_2).$$

则$\tilde{u}:x_1\to u_{x_1}$为X_1到$\mathscr{L}(X_2;Y)$的连续线性映射,且映射$\varphi:u\to\tilde{u}$是$\mathscr{L}(X_1,X_2;Y)$到$\mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2;Y))$的连续线性等距.

证 u_{x_1}的线性性质可由$u(x_1,x_2)$的二重线性得到.它的连续

性借助于下列估计，因为据定理 3.2，

$$\| u_{x_1}(x_2) \| = \| u(x_1,x_2) \| \leqslant (\| u \| \| x_1 \|) \| x_2 \|,$$

其中

$$\| u \| = \sup_{\| x_1 \| \leqslant 1, \| x_2 \| \leqslant 1} \| u(x_1,x_2) \| = \sup_{\| x_1 \| \leqslant 1} \| u_{x_1} \|.$$

于是，$u_{x_1} \in \mathscr{L}(X_2;Y)$. 从而，$\tilde{u}: x_1 \to u_{x_1}$ 确定了 X_1 到 $\mathscr{L}(X_2;Y)$ 的映射.

$\tilde{u}$ 的线性可由 u_{x_1} 的线性得到. $\tilde{u}$ 的连续性也据定理 3.2 可证，因为

$$\| \tilde{u}(x_1) \| = \| u_{x_1} \| = \sup_{\| x_2 \| \leqslant 1} \| u(x_1,x_2) \|$$
$$\leqslant \sup_{\| x_2 \| \leqslant 1} \| u \| \| x_1 \| \| x_2 \| = \| u \| \| x_1 \|.$$

于是 $\tilde{u} \in \mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2;Y))$. 从而，$\varphi: u \to \tilde{u}$ 是二重线性空间 $\mathscr{L}(X_1,X_2;Y)$ 到线性空间 $\mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2;Y))$ 的映射.

φ 的线性由 $\tilde{u}$ 的线性得到. φ 的连续性及等距可从下式证明，因为 $\varphi(u) = \tilde{u}$，且

$$\| \tilde{u} \| = \sup_{\| x_1 \| \leqslant 1} \| \tilde{u}(x_1) \| = \sup_{\| x_1 \| \leqslant 1} \| u_{x_1} \| = \| u \|.$$

余下只要证明 φ 是 $\mathscr{L}(X_1,X_2;Y)$ 到 $\mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2;Y))$ 的满射. 这也只需验证每个 $v \in \mathscr{L}(X_2;Y)$，有一个 $u \in \mathscr{L}(X_1,X_2;Y)$ 与之对应. 事实上，我们只要取

$$u: (x_1,x_2) \to (v(x_1))(x_2),$$

验证它是 $X_1 \times X_2$ 到 Y 的连续二重线性映射就够了，这一点留作练习.

这个定理的意义在于把积空间上的映射分解为两个因子空间上的映射. 因此可以把二重问题化为累次问题. 此外，用归纳法可以推广到 n 重情形.

定理 3.11 n 重连续线性映射空间 $\mathscr{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 与线性空间

$$\mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2;\cdots;\mathscr{L}(X_{n-1};\mathscr{L}(X_n;Y))\cdots))$$

等距同构.

3.3 连续映射空间,Banach 代数

连续映射空间在近代分析学中占有重要地位.我们从有界映射集出发来介绍它.

定义 3.4 设 A 为任一集,Y 为赋范线性空间.称 A 到 Y 的映射 $f: A\to Y$ 为有界映射,若 $f(A)$为 Y 中的有界集,亦即

$$\sup_{t\in A}\|f(t)\|<+\infty.$$

记 A 到 Y 的所有有界映射的全体为 $\mathscr{B}_Y(A)$,称它为 A 上的有界映射集.若在 $\mathscr{B}_Y(A)$中定义元 f 和 g 的加法运算与数乘

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\quad f,g\in\mathscr{B}_Y(A),\ t\in A,$$

$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t),\quad f\in\mathscr{B}_Y(A),\ \alpha\in\mathbf{K},$$

则 $\mathscr{B}_Y(A)$成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间.又若定义

$$\|f\|=\sup_{t\in A}\|f(t)\|,$$

易证 $\|f\|$ 是 $\mathscr{B}_Y(A)$上的范数,从而 $\mathscr{B}_Y(A)$为一赋范线性空间.

定理 3.12 设 A 为任一集,Y 为有限维赋范线性空间.若 $e_1,\cdots,e_n$ 为 Y 的标准基,亦即 $\|e_j\|=1,j=1,\cdots,n$,则 $\mathscr{B}_Y(A)$为 L_j 的拓扑直和,$j=1,\cdots,n$,这里

$$L_j=\{\varphi_j: t\to f_j(t)e_j,t\in A,f_j\in\mathscr{B}_Y(A)\},\quad j=1,\cdots,n,$$

且每个 L_j 都与 $\mathscr{B}_Y(A)$等距.

证 每个 $f\in\mathscr{B}_Y(A)$,可唯一地表示为

$$f(t)=f_1(t)e_1+\cdots+f_n(t)e_n,$$

$$f_j(t)\in Y,\quad j=1,\cdots,n;\ t\in A.$$

注意到

$$\sup_{t\in A}\|f(t)\|_Y<+\infty\Leftrightarrow\sup_{t\in A}\|f_j(t)\|_Y<+\infty,$$

则易证 f 有界,当且仅当每个 f_j 有界,并且映射 $t\to f_j(t)e_j$ 的范数为

$$\|f_j\|\cdot\|e_j\|=\|f_j\|\quad(\|f_j\|\text{ 取在 }\mathscr{B}_Y(A)\text{ 上}).$$

因此，$\mathscr{B}_Y(A)$为 L_j 的代数直和.

作为 $\mathscr{B}_Y(A)$的子空间，L_j 中的元的范数为

$$\| \varphi_j \| = \sup_{t\in A} \| f_j(t)e_j \| = \sup_{t\in A}\{ \| f_j(t) \| \} = \| f_j \| ,$$

故 L_j 与 $\mathscr{B}_Y(A)$等距.

为证明上述代数直和也是拓扑直和，只需证映射

$$p_j : f \to f_j e_j, \quad j = 1,\cdots,n$$

为连续映射.

由于映射$(f_1,\cdots,f_n)\to f=f_1e_1+\cdots+f_ne_n$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 到 Y 的同胚(本附录定理 1.13)，故据定理 3.2，存在常数 $c>0$，使对每个 $f(t)\in Y$，有

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} |f_j(t)| \leqslant c \| f(t) \|_Y,$$

其中 $t\in A$. 于是对每个 $t\in A$ 得

$$|f_j(t)| \leqslant c \sup_{t\in A} \| f(t) \|_Y = c \| f \| , \quad j = 1,\cdots,n.$$

这表明 p_j 是连续的. 故

$$\mathscr{B}_Y(A) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

定理 3.13 若 Y 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}_Y(A)$也是 Banach 空间.

定义 3.5 对于有界映射空间 $\mathscr{B}_Y(A)$，其中元列$\{f_n\}\subset\mathscr{B}_Y(A)$称为强收敛于 $g\in\mathscr{B}_Y(A)$，若

$$\| f_n - g \| = \sup_{t\in A} \| f_n(t) - g(t) \| \to 0, \quad n\to\infty.$$

元列$\{f_n\}$称为简单收敛于 $g\in\mathscr{B}_Y(A)$，若对每个 $t\in A$，有

$$\| f_n(t) - g(t) \| \to 0, \quad n\to\infty.$$

元列$\{f_n\}$称为范数收敛于 $g\in\mathscr{B}_Y(A)$，若

$$\| f_n \| \to \| g \| , \quad n\to\infty.$$

现在讨论连续映射空间.

我们知道，对于一个距离空间，在其上不一定有代数结构，而其拓扑结构由距离 ρ 给出，$\rho : X\times X\to\boldsymbol{R}$，满足

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

定义 3.6 设 X 为距离空间,Y 为赋范线性空间. 记 $C_Y(X)$ 为 X 到 Y 的所有连续映射的全体,称它为 X 到 Y 的连续映射集. 同样可按 Y 中元的加法与数乘运算使 $C_Y(X)$ 成为线性空间(数域与 Y 的数域相同). X 到 Y 的所有有界连续映射的全体,记为 $\mathscr{E}_Y(X)$,称为 X 上的有界连续映射空间,简称连续映射空间.

$\mathscr{E}_Y(X)$是 $C_Y(X)$与 $\mathscr{B}_Y(X)$的子空间:

$$\mathscr{E}_Y(X) = C_Y(X) \cap \mathscr{B}_Y(X),$$

故它在范数

$$\| f \| = \sup_{t\in X} \| f(t) \|$$

之下成为一个赋范线性空间. 它有如下一些性质:

定理 3.14 $\mathscr{E}_Y(X)$是 $\mathscr{B}_Y(X)$的闭子空间. 亦即有界连续映射列 $f_n: X\to Y$ 的强极限是有界连续映射.

定义 3.5 中的强收敛就是通常分析中一致收敛概念的推广,而简单收敛就是按点收敛的推广. 简单收敛的连续映射列的极限未必连续,这样的例子也不难举出. 定理 3.14 指出,有界连续映射列若强收敛,则其极限必连续.

强收敛蕴涵简单收敛,反之却不然. 下面的 Dini 定理是在 X 为紧距离空间,$Y=\boldsymbol{R}$ 的条件下给出简单收敛与强收敛的关系.

定理 3.15 设 X 为紧距离空间. 若$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{\boldsymbol{R}}(X)$为递增实值函数序列,$f_n\leqslant f_{n+1}, n=1,2,\cdots$;且 f_n 简单收敛于连续函数 $g\in C_{\boldsymbol{R}}(X)$,则 f_n 一致收敛于 g. 对递减情形类似的结论亦成立.

上述定理可利用 X 的紧性与数学分析中的常规方法证得.

此外,也不难看出,当 X 为紧空间时,$C_{\boldsymbol{R}}(X)$与 $\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(X)$是一致的.

$C_{\boldsymbol{R}}(X)$除了是赋范线性空间外,还有更进一步的结构,称之为 Banach 代数. 为此,我们从一般定义出发来介绍 Banach 代数.

定义 3.7 设 X 为任一集,$\mathbf{K}$ 为数域. 我们称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的代

数，若 X 中的元有三种运算，加法 $x+y$，数乘 $\alpha x(\alpha\in\mathbb{K})$，乘法 xy，满足

（1） X 关于加法与数乘成为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间；

（2） X 关于乘法有如下性质：

运算封闭：$x,y\in X \Rightarrow xy\in X$，

结合律：$(xy)z=x(yz)$，

数乘交换结合律：$(\alpha x)y=x(\alpha y)=\alpha(xy)$，

加乘分配律：

$$x(y+z)=xy+xz,\quad (y+z)x=yx+zx,$$

进而，若乘法还满足交换律 $xy=yx$，则称 X 为可换代数.

若 $\mathbb{K}$ 上的代数 X 是一个赋范线性空间，并且范数满足

（3） $\|xy\|\leqslant\|x\|\ \|y\|$，

我们称 X 为 $\mathbb{K}$ 上的赋范代数. 关于乘法满足交换律的赋范代数称为可换赋范代数. 完备的赋范代数称为 Banach 代数，相应地有可换 Banach 代数.

不难验证，当 X 为距离空间时，$\mathscr{C}_R(X)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的可换 Banach 代数，其中加法、数乘与乘法就是通常函数的加法、数乘与乘法.

定义 3.8 设 X 为 $\boldsymbol{R}$ 上的代数(赋范代数)，X_0 为 X 的线性子空间. 若 X_0 关于乘法运算封闭，即对 $x,y\in X_0$，有 $xy\in X_0$，则 X_0 也成为 $\mathbb{K}$ 上的代数，称为 X 的子代数(子赋范代数).

定理 3.16 若 A 是 $\mathscr{C}_R(X)$ 的子代数，则 $\overline{A}$ 也是 $\mathscr{C}_R(X)$ 的子 Banach 代数.

3.4 Stone-Weierstrass 定理及应用

大家记得经典的 Weierstrass 定理：

定理 3.17 设 $f(X)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数，则存在一个实系数多项式序列 $p_n(x)$，使 $p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

下面的推广就是著名的 Stone-Weierstrass 定理. 它不仅要用

到$\mathscr{R}_R(X)$的 Banach 代数结构，还要用到其上的格结构.

定义 3.9 设 X 为任一集，A 为 $\mathscr{B}_R(X)$的子集. 我们称 A 区分 X 的点，若对 X 中任一对元 $x,y\in X,x\neq y$，存在 $f\in A$，使

$$f(x)\neq f(y).$$

定义 3.10 设 X 为半序集，$a,b\in X$. 记

$$\sup\{a,b\}=a\vee b,\quad \inf\{a,b\}=a\wedge b.$$

若 X 中任意两个元 a,b 有上述上确界 $a\vee b$ 与下确界 $a\wedge b$，则称 X 为一个格(或称 X 具有格结构).

任一全序集为一个格.

格运算满足如下规律：

等幂律：$a\vee a=a$，$a\wedge a=a$；

交换律：$a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$；

结合律：$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$；

吸收律：$a\vee(b\wedge a)=a$，$a\wedge(b\vee a)=a$.

格未必满足分配律. 若一个格满足：

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),$$
$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$

则称它为一个分配格.

定理 3.18(Stone-Weierstrass) 设 X 为 T_2 型紧拓扑空间，设 $C_R(X)$为 $\boldsymbol{R}$ 上的 Banach 代数. 若 $A\subset C_R(X)$为子代数，且含有$C_R(X)$的乘法单位元 e，则 $\overline{A}=C_R(X)$，当且仅当 A 区分 X 的点.

证 *必要性*. X 为 T_2 型紧空间，故为 T_4 型空间，任取 $x,y\in X,x\neq y$，据 Urysohn 引理，存在连续函数 $f\in C_R(X)=\overline{A}$，使

$$f(x)=0,\quad f(y)=1.$$

再由 $f\in\overline{A}$，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $g\in A$，使 $|f(z)-g(z)|<\varepsilon$ 对 $z\in X$ 成立. 取 $\varepsilon=1/2$，则

$$\frac{1}{2}<g(y)<\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{2}<g(x)<\frac{1}{2}.$$

从而

$$g(x) \neq g(y).$$

于是 A 区分 X 的点.

充分性. 分三步证明.

第一步,证明 $\overline{A}$ 是一个格. 在 A 中定义运算

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

为证 $\overline{A}$ 在运算 $\vee$ 与 $\wedge$ 之下成为一个格,只要证 $\overline{A}$ 对于取绝对值的映射 $\varphi: f \to |f|$ 是封闭的,亦即 $f \in \overline{A}$ 蕴涵 $|f| \in \overline{A}$. 因为

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|,$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|.$$

令 $|f(x)| \leqslant c, x \in X$,由 X 的紧性知 $c < +\infty$. 于是

$$|f| = \sqrt{c^2 - (c^2 - f^2)} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)}$$

$$= c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)^n\right\}.$$

上式中的级数关于 $x \in X$ 一致收敛,而每一项均为 A 中的元,从而 $|f| \in \overline{A}$.

第二步;证明对每个 $f \in C_R(X)$ 及 $x, y \in X, x \neq y$,都存在 $g_{xy} \in A$,使

$$g_{xy}(x) = f(x), \quad g_{xy}(y) = f(y).$$

事实上,对于 $x \neq y$,由于 A 区分 X 的点,故存在 $g \in A$,使 $g(x) \neq g(y)$. 这等价于

$$\begin{bmatrix} g(x) & 1 \\ g(y) & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

因此方程组

$$\begin{cases} \alpha g(x) + 1 \cdot \beta = f(x), \\ \alpha g(y) + 1 \cdot \beta = f(y), \end{cases}$$

在数域 **K** 中有唯一的一组解 α,β. 令 $g_{xy}=\alpha g+\beta e$，e 为 $C_R(X)$的单位元，亦即 $e(x)=1$ 对每个 $x\in X$ 成立. 这个 g_{xy}满足所需的要求.

第三步，证明 $\overline{A}=C_R(X)$. 为此，也只需证明 $C_{R(X)}\subset\overline{A}$，亦即，任取 $f\in C_R(X)$，对于任给的 $\varepsilon>0$，要证明存在 $g\in\overline{A}$，使得

$$\| f-g \| < \varepsilon.$$

从而 $f\in\overline{A}$.

任给 $\varepsilon>0$，对每个 $x\in X$，取 $y\in X$，使 $x\neq y$. 据第二步，存在 $g_{xy}\in\overline{A}$，使

$$g_{xy}(x)=f(x),\quad g_{xy}(y)=f(y).$$

由 g_{xy}的连续性，存在 x 的开邻域 U_x，使得

$$-\varepsilon<g_{xy}(z)-f(z)<\varepsilon,\quad z\in U_x.$$

显然

$$\bigcup_{x\in X}U_x=X.$$

据 X 的紧性，存在 $U_{x_1},\cdots,U_{x_n}$，使

$$\bigcup_{j=1}^{n}U_{x_j}=X.$$

故当 $z\in U_{x_j}$时，$g_{x_jy}(z)>f(z)-\varepsilon$. 令

$$g_y=g_{x_1y}\vee\cdots\vee g_{x_ny},$$

由第一步知 $g_y\in\overline{A}$. 于是 $g_y(z)>f(z)-\varepsilon$ 对所有 $z\in X$ 成立.

现在，再由 g_y 的连续性及 X 的紧性，存在

$$V_{y_1},\cdots,V_{y_m},$$

使

$$\bigcup_{j=1}^{m}V_{y_j}=X,$$

且当 $z\in V_{y_j}$时，有

$$g_{y_j}(z)<f(z)+\varepsilon.$$

令 $g=g_{y_1}\wedge\cdots\wedge g_{y_n}$，则 $g\in\overline{A}$，并对所有 $z\in X$，有

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon.$$

于是

$$\| f - g \| = \max_{x \in X} |f(z) - g(z)| < \varepsilon,$$

从而 $g \in \overline{A}$. 定理得证.

定理 3.19(复域情形的 S-W 定理) 设 X 为紧 T_2 型拓扑空间. $C_C(X)$为 X 上复值连续函数所生成的 C 上的 Banach 代数. 若 $A \subset C_C(X)$为子代数,且含有 $C_C(X)$的乘法单位元 e. 此外,若 A 是共轭对称的(即 $f \in A$ 蕴涵$\tilde{f} \in A$),则 $\overline{A} = C_C(X)$,当且仅当 A 区分 X 的点.

Stone-Weierstrass 定理有很多应用,例如在群表观理论中、函数逼近理论中等等. 但由于超出了我们课程的内容,因此只举出下列初等应用的例子.

定理 3.20 三角系 $\{e^{n\pi i t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 在 $C_C([-1,1])$中是全集.

定理 3.21 若 X 是紧距离空间,则 $C_C(X)$与 $C_C(X)$都是可分的.

证 因为 $C_C(X) = C_R(X) \oplus iC_R(X)$,故只要对 $C_R(X)$ 证明即可. 由于紧距离空间是可分的(请读者自行证明,或参看泛函数分教程),可取$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 的可数开基,令

$$g_n(t) = \rho(t; X - U_n), \quad n = 1, 2, \cdots, \quad t \in X,$$

则由 g_n 组成的单项式 $g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n}$ 也构成可数集,这里 α_j 为正整数,记为 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. 而由 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$生成的线性空间 A 就是由 g_n 生成的 $C_R(X)$的一个子代数.

不难证明 A 区分 X 的点,因此据 Stone-Weierstrass 定理知

$$\overline{A} = C_R(X).$$

但是由 A 的定义及 $\overline{A} = C_R(X)$知$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $C_R(X)$中的全集,从而由定理 1.15 知,$C_R(X)$是可分的.

3.5 Arzela-Ascoli 定理

经典的 Arzela 定理给出 $C_R[a,b]$)中的子集列紧的充要条件.

定理 3.22 集合 $A\subset C_R([a,b])$是列紧集，当且仅当下列两条件成立：

(1) 集 A 是一致有界的，亦即存在常数 $K>0$，使对所有 $f\in A$，不等式 $|f(t)|\leqslant K$ 对 $t\in[a,b]$成立.

(2) 集 A 是等度连续的，亦即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对任意的 $f\in A$ 以及任意的 $t',t''\in[a,b]$，只要 $|t'-t''|<\delta$，就有 $|f(t')-f(t'')|<\varepsilon$.

推广的 Arzela-Ascoli 定理将$[a,b]$推广为紧距离空间 X，R 改为一般的 Banach 空间 Y，给出 $C_Y(X)$中的相对紧集的判别条件.

定义 3.11 设 X 为距离空间. 称子集 $A\subset X$ 为相对紧集，若 $\overline{A}$ 为紧集.

定义 3.12 设 X 为距离空间，A 与 B 为 X 的两个子集，给定 $\varepsilon>0$. 若对 A 中的任一点 x，必存在 B 中的一点 x'，使 $\rho(x,x')<\varepsilon$，则称 B 为 A 的一个 ε-网.

称子集 A 为准紧集(或全有界集)，若对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 A 的有限的 ε-网.

定义 3.13 设 X 为距离空间，Y 为赋范线性空间. $C_Y(X)$中的子集 H 称为在一点 $x_0\in X$ 等度连续，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 x 属于开球 $B(x_0,\delta)$的闭包

$$\overline{B(x_0,\delta)}=\{x\in X:\rho(x,x_0)\leqslant\delta\}$$

时，不等式 $\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant\varepsilon$ 对所有 $f\in H$ 成立.

又称 H 为等度连续的，若 H 在 X 的每一点都是等度连续的.

例 3.1 在 x_0 点连续的有限多个映射集 $H=\{f_1,\cdots,f_n\}\subset C_Y(X)$在 x_0 是等度连续的.

例 3.2 若存在常数 $c>0$，$\alpha>0$，使

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant c(\rho(x,y))^\alpha$$

对所有 $f\in H$ 成立，则 H 是等度连续的.

关于等度连续，我们给出下面几个性质.

定理 3.23 设 X 为距离空间，Y 为赋范线性空间. 若序列集 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_Y(X)$ 在 $x_0 \in X$ 等度连续（或在 X 上等度连续），且 f_n 简单收敛于映射 g，则 g 在 x_0 连续.

定理 3.24 在空间 $\mathscr{C}_Y(X)$ 中，等度连续集 H 的闭包也是等度连续的.

现在证明 Arzela-Ascoli 定理.

定理 3.25 设 X 为紧距离空间，Y 为 Banach 空间. 则 $C_Y(X)$ 中的子集 H 是相对紧的，当且仅当

（1）H 是等度连续的；

（2）集 $H(x)=\{f(x)\in Y : f\in H\}(x\in X)$ 是 Y 中的相对紧集.

证 *必要性*. 因 H 为相对紧集，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在有限 ε-网 $\{f_1,\cdots,f_n\}\subset C_Y(X)$，使对任一个 $f\in H$，都有一指标 $j_0\in\{1,\cdots,n\}$，满足

$$\| f - f_{j_0} \| \leqslant \varepsilon.$$

于是，对每个 $x\in X$，有 $\| f(x)-f_{j_0}(x) \| \leqslant\varepsilon$. 从而 $H(x)$ 是准紧的. 再由 Y 的完备性得知 $H(x)$ 是 Y 中的相对紧集，此即(2).

H 的等度连续性可由如下推理得到. 对于 H 的有限 ε-网 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 中的元 f_j 以及对任意 $x\in X$，由 f_j 的连续性，存在 X 中的开球

$$B(x,\delta) = \{y \in X : \rho(y,x) < \delta\},$$

使 $y\in B(x,\delta)$ 时，$\| f_j(y)-f_j(x) \| \leqslant\varepsilon$ 对 $j=1,2,\cdots,n$ 成立. 于是对 $f\in H$，由

$$\begin{aligned}&\| f(y) - f(x) \| \\ &\quad\leqslant \| f(y) - f_{j_0}(y) \| + \| f_{j_0}(y) - f_{j_0}(x) \| \\ &\qquad + \| f_{j_0}(x) - f(x) \|,\end{aligned}$$

因而，对于 $y\in B(x,\delta)$，有 $\| f(y)-f(x) \| \leqslant 3\varepsilon$. 从而(1)成立.

充分性. 因 $C_Y(X)$ 为 Banach 空间，为证 H 的相对紧性，只需证 H 是准紧的. 任给 $\varepsilon>0$，现在来找出 H 的有限 ε-网.

对 $x\in H$，由 H 的等度连续性，取 x 的开邻域 $B(x,\delta)$，使对 $y\in B(x,\delta)$时，

$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

对每个 $f\in H$ 成立. 于是

$$\bigcup_{x\in X} B(x,\delta) \supset X.$$

由 X 的紧性，存在 $x_1,\cdots,x_n$，使

$$\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\delta) \supset X.$$

另一方面，由 $H(x_j)(j=1,\cdots,n)$ 的相对紧性，知 $\bigcup_{j=1}^{n} H(x_j)$ 也是相对紧的. 取 $c_1,\cdots,c_m$ 为 $\bigcup_{j=1}^{n} H(x_j)$ 的有限$\frac{1}{4}\varepsilon$-网的中心. 设 Φ 是集$\{1,\cdots,n\}$到集$\{1,\cdots,m\}$的形如 $j\to\varphi(j)$的一切映射所生成的集，显然，Φ 是有限集. 对于每个 $\varphi\in\Phi$，用 L_φ 表示所有满足

$$\| f(x_j) - c\varphi(j) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

的 $f\in H$ 所生成的集，$j=1,2,\cdots,n$（可能某些 L_φ 是空集）. 由 $c_k(k=1,\cdots,m)$的定义知

$$\bigcup_{\varphi\in\Phi} L_\varphi \supset H.$$

因此，为完成充分性的证明，只需证明，每个 L_φ 的直径 $\leqslant\varepsilon$.

事实上，若 $f,g\in L_\varphi$，则对每个 $y\in X$，存在 j_0，使得 $y\in V(x_{j_0})$，这里 $V(x_{j_0})$为 x_{j_0}的某个邻域. 因此

$$\| f(y) - f(x_j) \|_Y \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

且有 $\| g(y)-g(x_i) \| \leqslant\varepsilon/4$. 但由定义知

$$\| f(x_j) - g(x_j) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

故对每个 $y\in X$，有

$$\| f(y) - g(y) \| \leqslant \varepsilon,$$

也就是 $\| f-g \| \leqslant \varepsilon$. 定理得证.

这个定理是近代分析学中的一个很重要的定理，在近代数学的诸多分支，例如在微分方程、调和分析与函数逼近论等学科中，有着广泛的应用. 只是由于这些应用超出了本教程的范围，这里从略. 有兴趣的读者可参考有关书目与书籍.

参考书目

[1] Beardon, A. F., Complex Analysis, The Argument Principle in Analysis and Topology, John Wiley & Sons, 1979.

[2] Berberian, S. K., Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, 1973.

[3] Butzer, P. L. & Nessel, R. J., Fourier 分析与逼近论(中译本),高等教育出版社,1985.

[4] 陈省身、陈维桓著,微分几何讲义,北京大学出版社,1984.

[5] Cohn, D. L., Measure Theory, Birkhauser, Boston · Basel · Stuttgart, 1980.

[6] Dieudonne, J., 现代分析基础(中译本),第一、二卷,科学出版社,1983.

[7] Folland, G. B., Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, John Wiley & Sons, 1984.

[8] Hewitt, E. & Ross, K. A., Abstract Harmonic Analysis, Springer-Verlag, 1982.

[9] Lang, S., Analysis Ⅱ, Addison Wesley Publishing Company, 1969.

[10] Naimark, M. A. & Slern, A. J., Theory of Group Representations, Springer-Verlag, 1985.

[11] Narasimhan, R., 实流形和复流形上的分析(中译本),科学出版社,1986.

[12] 齐民友,偏微分算子理论,科学出版社,1986.

[13] Rudin, W., 实分析与复分析(中译本),科学出版社,1983.

[14] Stein, E. M., 奇异积分与函数的可微性(中译本),北京大学出版社,1986.

[15] Szmydt, Z., Fourier Transformation and Linear Differential Equations (英译本), D. Reidel Publishing Company, 1977.